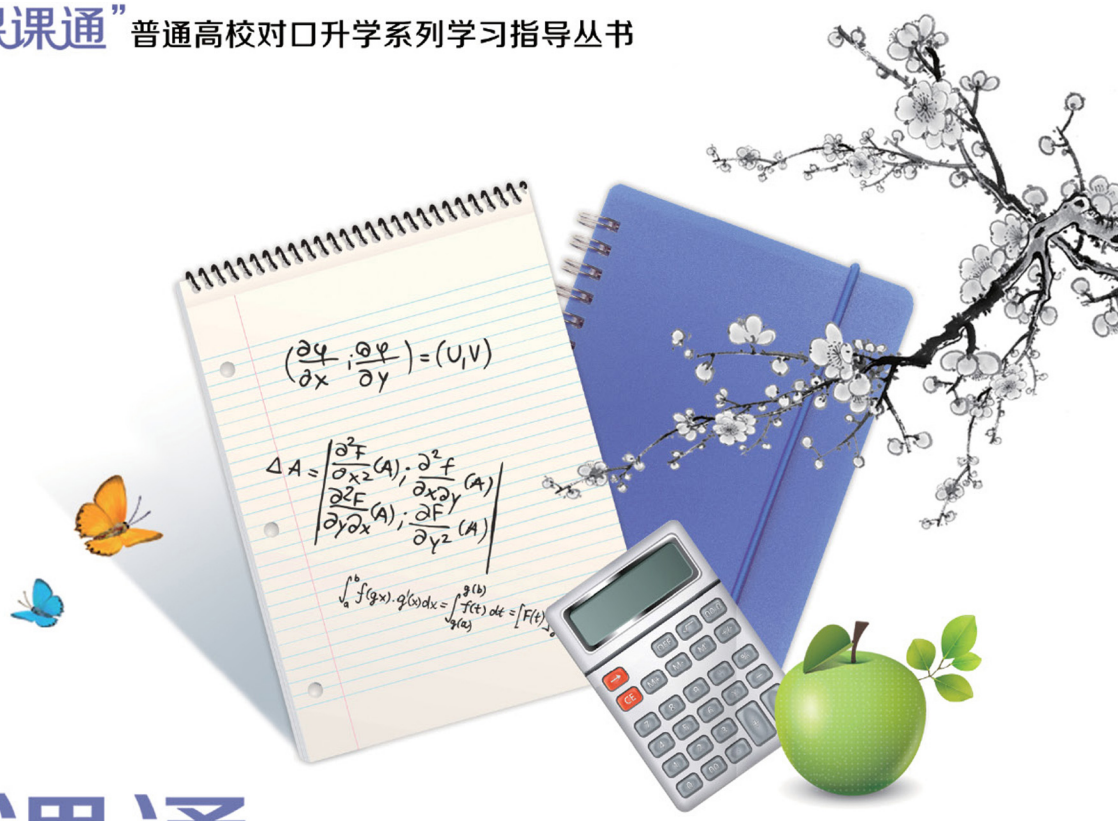
“课课通”普通高校对口升学系列学习指导丛书



课课通

对口升学考试专题复习与强化训练·数学

◎陆　军　崔永红　邹翠香　主　编
◎狄昌进　李龙山　庞骁红　徐菊萍　副主编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

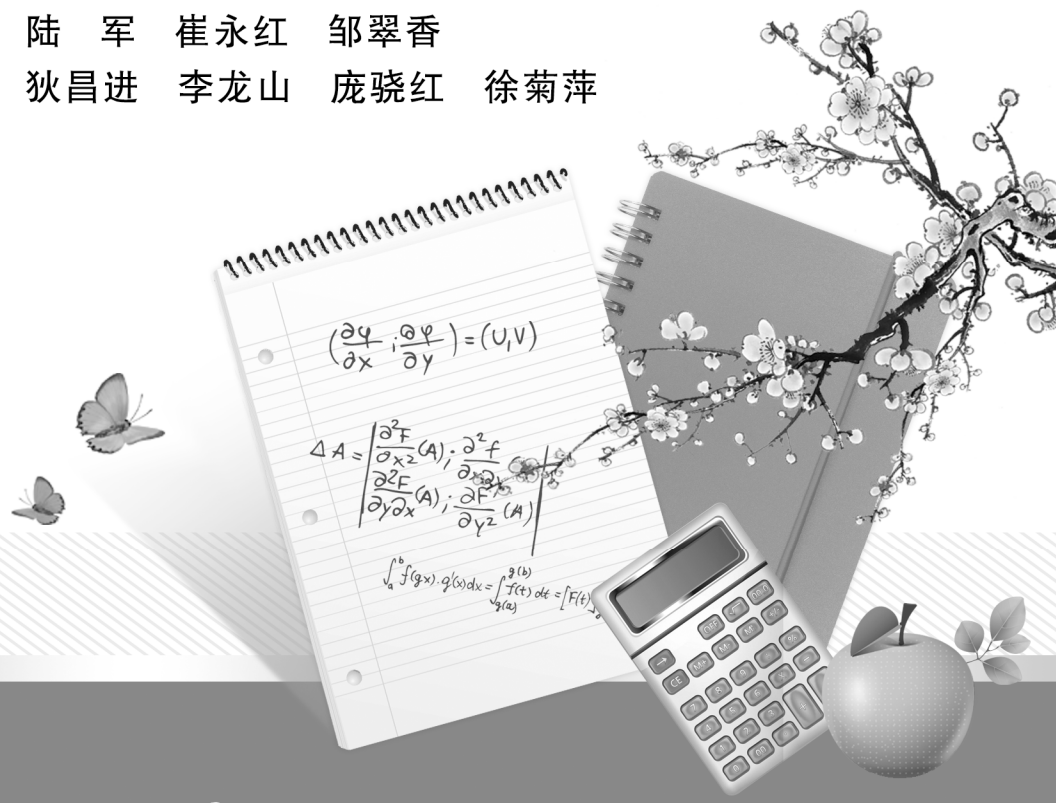
“课课通”普通高校对口升学系列学习指导丛书

课课通

对口升学考试专题复习与强化训练·数学

● 主　编　陆　军　崔永红　邹翠香

● 副主编　狄昌进　李龙山　庞骁红　徐菊萍



電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书由一批有多年毕业班教学经验的骨干教师和教研专家，根据新课标、新教材和最新考试大纲要求，结合他们自身的教学经验与研究心得，精心编写而成。本书对所学内容分专题全面梳理，每个专题设“思维导航”、“考点梳理”，每课时设“夯实基础”、“方法导引”、“实战演练”、“提炼反思”。书后还配有阶段测试卷和综合测试卷，测试卷单独成册，便于使用。

本书旨在理顺知识间的内在联系，既注重夯实学生的基础知识，又注重学生能力的培养，满足对口单招考试总复习的需求。

本书可作为中等职业学校对口升学考试复习用书，也可作为学生平时学习的自我检测用书以及教师教学的参考用书。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

课课通对口升学考试专题复习与强化训练. 数学 / 陆军，崔永红，邹翠香主编. —北京：电子工业出版社，2014.10
（“课课通”普通高校对口升学系列学习指导丛书）

ISBN 978-7-121-24275-5

Ⅰ. ①课… Ⅱ. ①陆… ②崔… ③邹… Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—升学参考资料 Ⅳ. ①G718.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 206038 号

策划编辑：张　凌
责任编辑：张　凌
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：12.75　字数：506 千字　黑插：56
版　　次：2014 年 10 月第 1 版
印　　次：2014 年 10 月第 1 次印刷
定　　价：52.00 元（附试卷）

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言



新课程改革淡化了对学生的终结性评价，突出了过程性评价，提倡重视学习过程和学习方法。学生在校学习期间，不仅要学会知识，还要学会发现问题、提出问题、研究问题和解决问题的方法。这不是题海所能赋予的。为了帮助广大考生科学、有效地进行复习，并轻松应战升学考试，我们在全省范围内组织了一批有多年毕业班教学经验的骨干教师和教研专家，根据新课标、新教材和最新考试大纲要求，结合他们自身的教学经验与研究心得，精心编写了《课课通对口升学考试专题复习与强化训练·数学》。本书对所学内容分专题全面梳理，理顺知识间的内在联系，既注重夯实学生的基础知识，又注重学生能力的培养，满足对口单招考试总复习需求。

本书将知识点梳理整合后，引导学生按专题进行复习，结构特色如下。

1．每个专题设“思维导航”、“考点梳理”。

思维导航：构建本专题科学的知识网络结构，便于学生整体把握教材，系统梳理知识点，从而全面掌握本专题内容。

考点梳理：对考纲的具体解读，帮助学生了解考查方向，使同学们的复习有的放矢。

2．每课时设“夯实基础”、“方法导引”、“实战演练”、“提炼反思”。

夯实基础：按章节梳理知识点、注意点，完整地展现数学内容，为了加深对数学内容的理解，每个知识点均配有理解知识内容的实例。在充分理解、掌握数学知识的同时，针对性地解决实际问题，增强运用知识解决问题的能力。

方法导引：精心选择了有代表性的例题，进行分析、讲解。着重解决本课时的重点问题、主要题型、解决问题的主要思想方法。加强知识结构内在联系的思考与运用，使学生养成良好的思维习惯，提高解决实际问题的能力。

实战演练：分为“达标检测”和“直击高考”两部分。“达标检测”，检测与巩固相结合，在检测中感受成功的喜悦，在检测中享受数学学习的快乐，在检测中增强对数学内容的理解与知识的整合，在检测中发现自身不足，达到巩固数学知识、理解数学知识、应用数学知识的目标。“直击高考”，精选与本课时内容、方法有紧密联系的高考真题，让学生感受高考，提高学生的学习兴趣。

提炼反思：在学习中反思，在反思中学习。反思数学知识结构，提炼数学知识的内在联系；反思数学基本技能，提炼数学应用价值；反思数学思想方法，提炼解决问题的途径与方法。

为提高一轮复习的针对性、科学性、高效性，在编写过程中，我们努力做到：强化基础落实、透近考情考向、提升解题技能、规范表达流程。本书编写特色如下。

1．**夯实考点基础，建构知识体系。**

宏观布局、细部优化，构建科学系统的知识体系，让学生牢固掌握、真正理解、灵活运用考点基础知识。

2．解读高考命题，复习有的放矢。

权威解读高考考什么、怎么考，聚焦高考热点、高频考点，剖析命题方向、题型变化，让备考更有针对性。

3．科学高效演练，增强解题能力。

检测训练着眼于练规范、练技能、练速度，习题以高考真题为模板，考点覆盖、梯度难度均与高考接轨。

4．细化解题流程，规范答题习惯。

注重答题技巧和规范答题习惯的培养，让解题答题有章可循，在循序渐进的演练中形成良好的答题习惯。

本书由陆军、崔永红、邹翠香担任主编，狄昌进、李龙山、庞骁红、徐菊萍担任副主编。本书在编写和出版过程中，电子工业出版社的编辑们付出了辛勤的劳动，在此表示衷心的感谢。限于时间仓促及编者水平，缺点和不完善之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

亲爱的同学们，本书作为实现理想的见证者，它不仅要见证你实现理想时付出的那份艰辛，更要见证你实现理想后收获的那份喜悦。同学们，让我们扬起理想的风帆从这里启航，共同努力，定能到达胜利的彼岸！

课课通·数学编写组

2014 年 7 月

目 录

专题一　集合 ……1

第 1 讲　集合的概念与集合间的关系 ……1
第 2 讲　集合的运算及充要条件 ……5

专题二　不等式 ……9

第 1 讲　不等式的基本性质 ……10
第 2 讲　解不等式 ……13
第 3 讲　线性规划初步 ……17

专题三　数列 ……24

第 1 讲　数列与等差数列 ……24
第 2 讲　等比数列 ……28
第 3 讲　数列的综合应用 ……32

专题四　函数 ……37

第 1 讲　函数的基本概念 ……38
第 2 讲　函数的性质 ……42
第 3 讲　一次函数、反比例函数和二次函数 ……46
第 4 讲　幂、指数、对数运算 ……51
第 5 讲　幂、指数、对数函数 ……55
第 6 讲　函数的实际应用 ……59

专题五　三角函数 ……64

第 1 讲　三角函数的相关概念 ……65
第 2 讲　三角变换与求值 ……69
第 3 讲　三角函数的图像和性质 ……73
第 4 讲　解三角形 ……78

专题六　概率统计 ……83

第 1 讲　排列与组合 ……84

第 2 讲　概率 ····· 89
第 3 讲　统计 ····· 94

专题七　平面向量及复数 ····· 100

第 1 讲　向量的概念与线性运算 ····· 101
第 2 讲　平面向量的坐标运算与数量积 ····· 105
第 3 讲　复数的概念及运算 ····· 110

专题八　平面解析几何 ····· 115

第 1 讲　直线 ····· 116
第 2 讲　圆 ····· 121
第 3 讲　直线与圆的位置关系 ····· 124
第 4 讲　椭圆的标准方程与性质 ····· 127
第 5 讲　双曲线的标准方程和性质 ····· 132
第 6 讲　抛物线的标准方程和性质 ····· 136
第 7 讲　直线与圆锥曲线 ····· 139
第 8 讲　坐标轴平移和参数方程 ····· 145

专题九　立体几何 ····· 150

第 1 讲　点、线、面的位置关系 ····· 151
第 2 讲　柱、锥、球及其组合体 ····· 159

专题十　选考内容 ····· 166

第 1 讲　逻辑代数初步 ····· 167
第 2 讲　算法与程序框图 ····· 174
第 3 讲　数据表格信息处理 ····· 181
第 4 讲　编制计划的原理与方法 ····· 190

专题一　集　　合

【思维导航】

- 集合
 - 集合的基本概念
 - 集合的描述
 - 集合元素的特性：确定性、互异性、无序性
 - 元素与集合的关系：属于$\in$、不属于$\notin$
 - 集合的表示：列举法、描述法、韦恩（Venn）图法
 - 集合的分类：有限集、无限集、空集$\varnothing$
 - 常见数集：**N**，$\mathbf{N}^*(\mathbf{N}_+)$，**Z**，**Q**，**R**
 - 集合间的基本关系
 - 子集$A\subseteq B$
 - 真子集$A\subsetneq B$
 - 集合相等$A=B$
 - 集合的基本运算
 - 交集$P\cap Q$
 - 并集$P\cup Q$
 - 补集$\complement_U P$
 - 充要条件
 - 充分条件
 - 必要条件
 - 充要条件

【考点梳理】

考　　点	要　　求
集合与元素	理解
集合的表示法	理解
集合之间的关系	理解
集合的运算	理解
充要条件	了解

第 1 讲　集合的概念与集合间的关系

【夯实基础】

1．集合的定义：由某些确定的、不同的对象组成的整体叫做集合，常用大写英文字母表示．

★设 a，b 是非零实数，那么 $\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}$ 可能取的值组成集合的元素是_____．

2．集合的元素：集合中的每一个对象称为元素，常用小写英文字母表示，研究集合首先要研究集合中的元素是什么．

★已知集合 $M=\{y\mid y=x^2+1,\ x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y\mid y=x+1,\ x\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N=$_____．

3．集合中的元素具有确定性、无序性和互异性．在求有关集合问题时，尤其要注意元素的互异性．

★由实数 x，$-x$，$|x|$，$\sqrt{x^2}$，$-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合，最多含 （　　）

A．2 个元素　　B．3 个元素　　C．4 个元素　　D．5 个元素

4．集合的表示方法有列举法、描述法、图示法．

★已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x\mid -2\leqslant x-1\leqslant 2\}$ 和 $N=\{x\mid x=2k-1,\ k\in\mathbf{N}^*\}$ 的关系的韦恩（Venn）图如图 1-1-1 所示，则阴影部分所示的集合为_____．

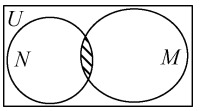


图 1-1-1

5．元素与集合的关系只有两种：属于与不属于．若 a 是集合 A 的元素，记作 $a\in A$；若 b 不是集合 A 的元素，记作 $b\notin A$．

★设集合 $A=\{x\mid x=\frac{1}{2}k+\frac{1}{4},\ k\in\mathbf{Z}\}$，若 $x=\frac{5}{2}$，则 x 与 A 的关系是 x_____A．

6．集合与集合的关系用 $\subseteq$，$\subsetneq$，$=$ 表示：A 是 B 的子集记为 $A\subseteq B$；A 是 B 的真子集记为 $A\subsetneq B$．

①任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$；

②空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$；空集是任何非空集合的真子集；

③如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$；如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$．

★ 下列写法①$\varnothing\subseteq A$，②$\varnothing\subsetneq A$，③$A\subseteq A$，④$A\subsetneq A$，正确的有 （　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

7．对于含有 n 个元素的有限集合 M，其子集、真子集、非空子集、非空真子集的个数依次为 2^n，2^n-1，2^n-1，2^n-2．

★满足 $\{1,2\}\subsetneq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 集合 M 有_____个．

8．注意空集 $\varnothing$ 的特殊性，在解题中，若未能指明集合非空时，要考虑到空集的可能性，如 $A\subseteq B$，则有 $A=\varnothing$ 或 $A\neq\varnothing$ 两种可能，此时应分类讨论．

★集合 $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$，$B=\{x\mid ax+1=0\}$，若 $B\subseteq A$，则 $a=$_____．

【方法导引】

【例 1-1-1】 集合 M 中的元素为 1，x，x^2-x，求 x 的取值范围．

【解】由题意知：$1\neq x\neq x^2-x$

解得：$x\neq 1$ 且 $x\neq 0$ 且 $x\neq 2$ 且 $x\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

所以 x 的取值范围是 $\{x\mid x\neq 1$ 且 $x\neq 0$ 且 $x\neq 2$ 且 $x\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\}$．

【例 1-1-2】 已知集合 $P=\{-1,\ a,\ b\}$，$Q=\{-1,\ a^2,\ b^2\}$，若 $P=Q$，求 $1+a^2+b^2$ 的值.

【解】 由题意得：$\begin{cases}a=a^2\\b=b^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=b^2\\b=a^2\end{cases}$

解得：$\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

当 $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$ 时，$P=\{-1,\ 0,\ 0\}$，$Q=\{-1,\ 0,\ 0\}$（舍去）

当 $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$ 时，$P=\{-1,\ 0,\ 1\}$，$Q=\{-1,\ 0,\ 1\}$，符合题意，$1+a^2+b^2=2$

当 $\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$ 时，$P=\{-1,\ 0,\ 1\}$，$Q=\{-1,\ 0,\ 1\}$，符合题意，$1+a^2+b^2=2$

当 $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ 时，$P=\{-1,\ 1,\ 1\}$，$Q=\{-1,\ 1,\ 1\}$（舍去）

综上得：$1+a^2+b^2=2$.

【例 1-1-3】 已知集合 $A=\{a\mid \frac{6}{3-a}\in\mathbf{N},\ a\in\mathbf{Z}\}$，试用列举法表示集合 A.

【解】 $\because \frac{6}{3-a}\in\mathbf{N}$，$\therefore 1\leqslant 3-a\leqslant 6$，即 $-3\leqslant a\leqslant 2$　又 $\because a\in\mathbf{Z}$，

所以 a 的取值为 -3，0，1，2 时，$\frac{6}{3-a}$ 的取值为 1，2，3，6，

故 $A=\{-3,\ 0,\ 1,\ 2\}$.

【例 1-1-4】 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-4x+p=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

【解】 由题意得：$A=\{-1,\ 2\}$，$\because B\subseteq A$，$\therefore B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{-1,\ 2\}$

又 $\because B=\{x\mid x^2-4x+p=0\}$，$\therefore B=\{-1,\ 2\}$ 不成立.

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=(-4)^2-4p=16-4p<0$，解得：$p>4$

当 $B=\{-1\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0\\(-1)^2-4\times(-1)+p=0\end{cases}$，无解

当 $B=\{2\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0\\2^2-4\times 2+p=0\end{cases}$，解得：$p=4$

综上得：实数 p 的取值范围是：$p\in[4,\ +\infty)$.

【实战演练】

一、达标检测

1．设集合 $A=\{x\mid x=2k+1,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2k-1,\ k\in Z\}$，则集合 A、B 间的关系为（　　）

A．$A=B$　　B．$A\subset B$　　C．$B\subset A$　　D．以上都不对

2．已知集合 $A=\{x\mid a+1\leqslant x\leqslant 2a-1\}$，$B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，且 $A\subseteq B$，则 a 的取值范围

是 （ ）

A．$-1\leqslant a\leqslant 2$　　B．$a<3$　　C．$2\leqslant a\leqslant 3$　　D．$a\leqslant 3$

3．若集合$P=\{y\mid y=x^2,\ x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{(x,\ y)\mid y=x^2,\ x\in\mathbf{R}\}$，则必有 （ ）

A．$P\subseteq Q$　　B．$P\supseteq Q$　　C．$P\cap Q=\varnothing$　　D．$P=Q$

4．已知$x^2\in\{0,\ x\}$，则x的值是_____.

5．若含有三个实数的集合可表示为$\{a,\ \frac{b}{a},\ 1\}$，也可表示为$\{a^2,\ a+b,\ 0\}$，则$a^{2013}+b^{2014}=$_____.

6．若集合$A=\{x\mid x=a^2-4a+5,\ a\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=4b^2+4b+2,\ b\in\mathbf{R}\}$，则集合$A$与$B$的关系是_____.

7．设关于x的不等式组$\begin{cases}x-a<0\\x+1>0\end{cases}$的解集为$P$，不等式$|x-1|\leqslant 1$的解集为$Q$.

（1）若$a=3$，求P；

（2）若$Q\subseteq P$，求正数a的取值范围.

8．已知集合$A=\{-1,\ 2,\ 3,\ a^2+2a-3,\ |a+1|\}$，其中$a\in\mathbf{R}$.

（1）若5是A中的一个元素，求a的值；

（2）是否存在实数a，使得A中的最大元素是12？若存在，求出对应的a的值；若不存在，试说明理由.

二、直击高考

1．（2011年单招试题）设集合$M=\{x\mid 0\leqslant x<3,\ x\in\mathbf{N}\}$，则$M$的真子集个数为（ ）

A．3　　B．6　　C．7　　D．8

2．（2005年单招试题）设集合$A=\{x\mid x=2k+1,\ k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x=2k,\ k\in\mathbf{N}\}$，$E=A\cup B$，那么下列关系中正确的是 （ ）

A．$E\in\mathbf{N}$　　B．$E=\mathbf{N}$　　C．$E\supset\mathbf{N}$　　D．E 与 $\mathbf{N}$ 互不包含

3．（2000 年单招试题）设 $M=\{x\mid x\leqslant\sqrt{10}\}$，$a=3$，则下列各式正确的是　　（　　）

A．$a\subset M$　　B．$a\notin M$　　C．$\{a\}\in M$　　D．$\{a\}\subset M$

【提炼反思】

1．本节的重点是集合的基本概念、表示方法及两种关系．对集合的认识，关键在于化简给定的集合，确定集合的元素，并真正认识集合中元素的属性，特别要注意代表元素的形式，不要将点集和数集混淆．

2．解集合问题时，特别要注意集合中元素的互异性，对计算的结果要加以检验．

3．注意空集 $\varnothing$ 的特殊性，在解题时，若未指明集合非空，则要考虑到集合为空集的可能性．

4．符号“$\in,\notin$”表示的是元素与集合之间的关系，在立体几何中体现点与直线（面）的关系；符号“$\subseteq$，$\subset$，$\not\subset$”表示的是集合与集合之间的关系，在立体几何中体现面与直线（面）的关系．

5．要注意数学思想方法在解题中的运用，如化归与转化、分类讨论、数形结合的思想方法在解题中的应用．

第 2 讲　集合的运算及充要条件

【夯实基础】

1．交集：给定两个集合 A，B，由既属于集合 A 又属于集合 B 的元素组成的集合，叫做集合 A 与集合 B 的交集，交集 $A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}$．

★若集合 $A=\{x\mid(x-1)^2<3x+7,\ x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap\mathbf{Z}=$_____．

2．并集：给定两个集合 A，B，把它们所有的元素合并在一起组成的集合，叫做集合 A 与集合 B 的并集，并集 $A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}$．

★集合 $A=\{0,2,a\}$，$B=\{1,a^2\}$，若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$，则 $a=$_____．

3．全集与补集：

（1）如果我们所研究的集合涉及的全部元素都属于集合 U，那么这个集合 U 叫做全集；

（2）若 U 是一个全集，$A\subseteq U$，则 $\complement_U A=\{x\mid x\in U\text{且}x\notin A\}$，叫做集合 A 在全集 U 中的补集；

（3）简单性质：①$\complement_U U=\varnothing$，$\complement_U\varnothing=U$；②$\complement_U(\complement_U A)=A$．

★设 $U=\{0,1,2,3\}$，$A=\{x\in U\mid x^2+mx=0\}$，若 $\complement_U A=\{1,2\}$，则实数 $m=$_____．

4．研究集合问题，一定要理解集合的意义，抓住集合的代表元素．

★已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x=2a,a\in A\}$，则集合 $\complement_U(A\cup B)=$_____．

5．在具体计算时不要忘了集合本身和空集这两种特殊情况．

★已知 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid ax-2=0\}$ 且 $A\cup B=A$，则实数 a 组成的集合是_____.

6．数轴和韦恩图是进行交、并、补运算的有力工具.

★已知集合 $A=\{x\mid |x|\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid x\geqslant a\}$ 且 $A\cap B=A$，则实数 a 的取值范围是_____.

7．充分与必要条件：命题“若 p 则 q”为真，记作 $p\Rightarrow q$；“若 p 则 q”为假，记作“$p\not\Rightarrow q$”. ①如果已知 $p\Rightarrow q$，则称 p 是 q 的充分条件，而 q 是 p 的必要条件；②如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，即 $p\Leftrightarrow q$，则称 p 是 q 的充要条件.

★若 p：$x=1$，q：$x^2=1$，则 p 是 q 的_____条件.

8．判断充要条件关系的三种方法：

（1）定义法直接推理：由条件 p 出发进行推理，然后由结论 q 出发进行推理.

① 若 $p\Rightarrow q$，且 $q\not\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充分但不必要条件，而 q 是 p 的必要但不充分条件；

② 若 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件（q 也是 p 的充要条件）；

③ 若 $p\not\Rightarrow q$，且 $q\not\Rightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

★在△ ABC 中，“$\sin A>\sin B$”是“$A>B$”的_____条件.

（2）从集合思想考虑：如果条件 p 与结论 q 很容易用集合来描述，则从集合思想考虑比较简单．设 $P=\{p\}$，$Q=\{q\}$，

① 若 $P\subseteq Q$，则 p 是 q 的充分但不必要条件，而 q 是 p 的必要但不充分条件；

② 若 $Q\subseteq P$，则 p 是 q 的必要但不充分条件，而 q 是 p 的充分但不必要条件；

③ 若 $P=Q$，则 p 是 q 的充要条件（q 也是 p 的充要条件）；

④ 若 $P\not\subset Q$ 且 $Q\not\subset P$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

★“$|x-1|<2$ 成立”是“$x(x-3)<0$ 成立”的_____条件.

（3）数形结合法：

★对实数 x，y，“$x^2+y^2\leqslant 1$”是“$|x|\geqslant 1$，$|y|\leqslant 1$”的_____条件.

【方法导引】

【例 1-2-1】 设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x^2-x-2=0\}$，$B=\{x\mid |x|=y+1,\ y\in A\}$，求 $\complement_U B$.

【解】 ∵ $A=\{x\mid x^2-x-2=0\}=\{-1,2\}$，$y\in A$，

∴当 $y=-1$ 时，$x=0$；当 $y=2$ 时，$x=\pm 3$，∴ $B=\{-3,0,3\}$

所以 $\complement_U B=\{x\mid x\neq -3且x\neq 0且x\neq 3\}$.

【例 1-2-2】 已知集合 $A=\{x\mid x^2+(2+a)x+1=0\}$，$B=\{x\mid x>0\}$，试问是否存在实数 a，使得 $A\cap B=\varnothing$？若存在，求出实数 a 的值；若不存在，请说明理由.

【解】 假设存在实数 a 满足条件 $A\cap B=\varnothing$，则有

（1）当 $A\neq\varnothing$ 时，由 $A\cap B=\varnothing$，$B=\{x\mid x>0\}$，知集合 A 中的元素为非正数，

设方程 $x^2+(2+a)x+1=0$ 的两根为 x_1，x_2，则由根与系数的关系，得

$$\begin{cases}\Delta=(2+a)^2-4\geqslant 0\\ x_1+x_2=-(2+a)<0\\ x_1x_2=1>0\end{cases}$$，解得 $a\geqslant 0$.

（2）当 $A=\varnothing$ 时，则有 $\Delta=(2+a^2)-4<0$，解得 $-4<a<0$

综上知存在满足条件 $A\cap B=\varnothing$ 的实数 a，其取值范围是 $a\in(-4,+\infty)$.

【例 1-2-3】 判断下列问题中，p 是 q 的什么条件？

（1）p：$x^2>y^2$，q：$x>y$；　（2）p：$x\in A\cup B$，q：$x\in A\cap B$；

（3）p：$x>3$，q：$x>2$；　（4）p：a 是有理数，q：$a+2$ 是有理数.

【解】（1）因为 $p\nRightarrow q$，且 $q\nRightarrow p$，所以 p 是 q 的既不充分也不必要条件；

（2）因为 $q\Rightarrow p$，而 $p\nRightarrow q$，所以 p 是 q 的必要但不充分条件；

（3）因为 $p\Rightarrow q$，而 $q\nRightarrow p$，所以 p 是 q 的充分但不必要条件；

（4）因为 $p\Rightarrow q$，而 $q\Rightarrow p$，即 $p\Leftrightarrow q$，所以 p 是 q 的充要条件.

【例 1-2-4】 已知集合 $M=\{x\mid x<3或x>5\}$，$P=\{x\mid(x-a)(x-8)\leqslant 0\}$.

（1）求实数 a 的取值范围，使它成为 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$ 的充要条件；

（2）求实数 a 的一个值，使它成为 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$ 的一个充分但不必要条件；

（3）求实数 a 的取值范围，使它成为 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$ 的一个必要但不充分条件.

【解】（1）由题意得：$a\in\{a\mid 3\leqslant a\leqslant 5\}$；

（2）由题意得：$a=4$（答案不唯一）；

（3）由题意得：$a\in\{a\mid a\leqslant 5\}$.

【实战演练】

一、达标检测

1．已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x\mid|x-1|\leqslant 2\}$，则 $\complement_U M=$　（　）

A．$\{x\mid-1<x<3\}$　　B．$\{x\mid-1\leqslant x\leqslant 3\}$

C．$\{x\mid x<-1或x>3\}$　　D．$\{x\mid x\leqslant-1或x\geqslant 3\}$

2．已知 A，B 均为集合 $U=\{1,3,5,7,9\}$ 的子集，且 $A\cap B=\{3\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{9\}$，则 $A=$　（　）

A．$\{1,3\}$　　B．$\{3,7,9\}$　　C．$\{3,5,9\}$　　D．$\{3,9\}$

3．使“$\lg m<1$”成立的一个充分但不必要条件是　（　）

A．$m\in(0,+\infty)$　　B．$m\in\{1,2\}$　　C．$m\in(0,10)$　　D．$m\in(-\infty,1)$

4．“$m<\dfrac{1}{4}$”是“一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有实数根”的　（　）

A．充分但不必要条件　　B．必要但不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．设集合 $A=\{x\mid|x-2|\leqslant 2\}$，$B=\{y\mid y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=$_____.

6．设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid 2^{x(x-2)}<1\}$，$B=\{x\mid y=\ln(1-x)\}$，则图 1-2-1 中阴影部分表示的集合为_____.

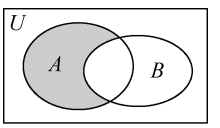


图 1-2-1

7．已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid x+1-2m>0\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围.

8．设全集$U=\{1,3,x^3+3x^2+2x\}$，若集合$A=\{1,|2x-1|\}$且$\complement_U A=\{0\}$，则这样的实数x是否存在？若存在，求出x；若不存在，请说明理由．

二、直击高考

1．（2013年单招试题）若集合$M=\{x|x+2>0\}$，$N=\{x|x-3<0\}$，则$M\cap N=$（　　）

A．$(-\infty,-2)$　　B．$(-\infty,3)$　　C．$(-2,3)$　　D．$(3,\infty)$

2．（2010年单招试题）已知全集$U=\{0,1,2,3,4,5\}$，集合$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$（　　）

A．$\{4\}$　　B．$\{0\}$　　C．$\{0,4\}$　　D．$\{1,2,3,5\}$

3．（2012年单招试题）函数$f(x)=x^2+mx+n$的图像关于直线$x=1$对称的充要条件是（　　）

A．$m=-2$　　B．$m=2$　　C．$n=-2$　　D．$n=2$

【提炼反思】

1．在解决有关集合运算的题目时，关键是准确理解题目中符号语言的含义，善于转化为文字语言．

2．集合的运算可以用韦恩图帮助思考，理解题意．实数集合的交、并、补运算可在数轴上表示，注意在运算中运用数形结合思想．基本步骤是：（1）准确理解集合中代表元素的特性并化简；（2）利用数轴、坐标系、韦恩图画出各个集合；（3）利用数形结合思想探讨集合之间的关系和运算．

3．当集合中含有参数时，要注意运用分类讨论的思想，将每一种情况一一列举出来进行分析；对于给出的集合是否为空集，集合中的元素个数是否确定，都是常见的讨论点．

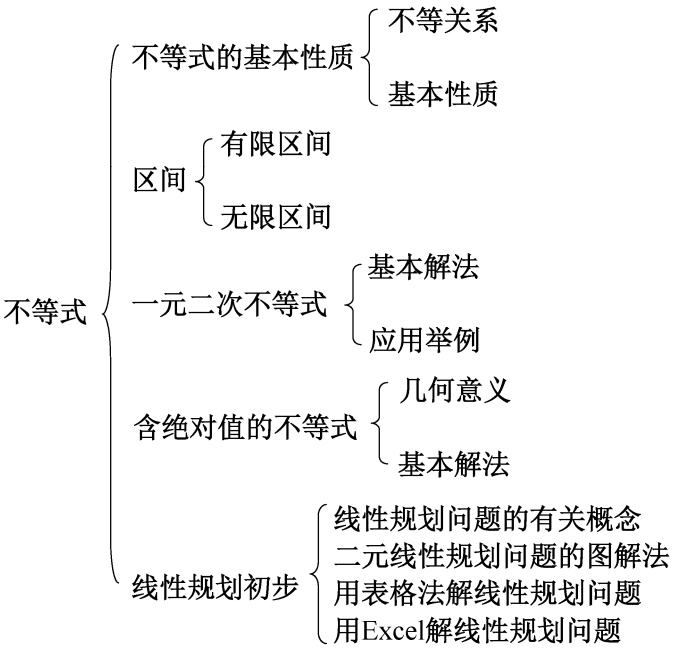
4．处理充分、必要条件问题时，首先要分清条件与结论，然后才能进行推理和判断．不仅要深刻理解充分、必要条件的概念，而且要熟知问题中所涉及的知识点和有关概念．

5．确定条件为不充分或不必要的条件时，常用构造反例的方法来说明．

6．对一个命题而言，使结论成立的充分条件可能不止一个，必要条件也可能不止一个．

专题二　不　等　式

【思维导航】



【考点梳理】

考　　点	要　　求
不等式的基本性质	理解
区间	理解
一元二次不等式	掌握
含绝对值的不等式	了解
线性规划问题的有关概念	理解
二元线性规划问题的图解法	理解
用表格法解线性规划问题	了解

第1讲　不等式的基本性质

【夯实基础】

1．应用不等式表示不等关系

★如果一辆汽车每天行驶路程比原来多19km，那么在8天内它的行程就超过2200km，如果它每天行驶的路程比原来少12km，那么它行驶同样的路程得花9天多的时间，这辆汽车原来每天行驶的路程（km）范围是_____.

2．实数的大小与运算性质之间的关系

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

★设$a=2-\sqrt{5}$，$b=\sqrt{5}-2$，$c=5-2\sqrt{5}$，则a，b，c之间的大小关系为_____.

3．不等式的性质

（1）对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$，$a<b\Leftrightarrow b>a$；

（2）传递性：$a>b$，$b>c\Rightarrow a>c$；

（3）可加性：$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$；

移项法则：$a+b>c\Leftrightarrow a>c-b$；

推论：同向不等式可加　$a>b$，$c>d\Rightarrow a+c>b+d$；

（4）可乘性：$a>b$，$c>0\Rightarrow ac>bc$，　$a>b$，$c<0\Rightarrow ac<bc$；

推论1：同向（正）可乘：$a>b>0$，$c>d>0\Rightarrow ac>bd$；

推论2：可乘方（正）：$a>b>0\Rightarrow$　$a^n>b^n$　（$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$）.

（5）可开方（正）：$a>b>0\Rightarrow$　$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$　（$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$）.

★给出下列几个命题：

①若$a>b>0$，则$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$；

②若$a>b>0$，则$a-\dfrac{1}{a}>b-\dfrac{1}{b}$；

③若$a>b>0$，则$\dfrac{2a+b}{a+2b}>\dfrac{a}{b}$.

其中正确命题的序号是_____.（把你认为正确的命题序号都填上）

4．用不等式的性质求变量或参数的取值范围

★　若$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，则$\alpha-\beta$的取值范围是_____.

5．不等式大小比较的常用方法

（1）作差：作差后通过分解因式、配方等手段判断差的符号得出结果；（2）作商（常用于分数指数幂的代数式）.

★　设实数a，b，c满足$\begin{cases}a+b=6-4a+3a^2\\ c-b=4-4a+a^2\end{cases}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为_____.

【方法导引】

【例 2-1-1】 某钢铁厂要把长度为 4000mm 的钢管截成 500mm 和 600mm 两种，按照生产的要求，600mm 钢管的数量不能超过 500mm 钢管的 3 倍．怎样写出满足上述所有不等关系的不等式呢？

【解】 设截成 500mm 和 600mm 的数量分别为 x 和 y，由题意得

$$\begin{cases} 500x+600y \leqslant 4000 \\ y \leqslant 3x \\ x,\ y \in \mathbf{N}^* \end{cases}.$$

【例 2-1-2】 已知 $-1<a+b<3$ 且 $2<a-b<4$，求 $2a+3b$ 的取值范围．

【解】 因为 $-1<a+b<3$ 且 $2<a-b<4$，得 $\frac{1}{2}<a<\frac{7}{2}$ 且 $-\frac{5}{2}<b<\frac{1}{2}$，

所以 $1<2a<7$，$-\frac{15}{2}<3b<\frac{3}{2}$，故 $-\frac{13}{2}<2a+3b<\frac{17}{2}$．

【例 2-1-3】 若 $x<y<0$，试比较 $(x^2+y^2)(x-y)$ 和 $(x^2-y^2)(x+y)$ 的大小．

【解】 $(x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)=(x-y)[(x^2+y^2)-(x+y)^2]$

$=-2xy(x-y)$

$\because x<y<0$，$\therefore xy>0$，$x-y<0$，$\therefore -2xy(x-y)>0$

即 $(x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)>0$

$\therefore (x^2+y^2)(x-y)>(x^2-y^2)(x+y)$

【例 2-1-4】 设函数 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1 \leqslant f(-1) \leqslant 2$，$2 \leqslant f(1) \leqslant 4$，求 $f(-2)$ 的取值范围．

【解】 设 $f(-2)=mf(-1)+nf(1)$，则 $4a-2b=m(a-b)+n(a+b)$，

即 $4a-2b=(m+n)a+(n-m)b$，得 $\begin{cases} m+n=4 \\ n-m=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases}$，

$\therefore f(-2)=3f(-1)+f(1)$，

又 $\because 1 \leqslant f(-1) \leqslant 2$，$2 \leqslant f(1) \leqslant 4$，$\therefore 5 \leqslant 3f(-1)+f(1) \leqslant 10$，

故 $5 \leqslant f(-2) \leqslant 10$．

【实战演练】

一、达标检测

1．对于任意实数 a，b，c，d，命题：

①若 $a>b$，$c \neq 0$，则 $ac>bc$；②若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；③若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$．其中真命题的个数是　（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

2．如果 $a>b$，给出下列不等式，其中成立的是　（　　）

① $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；② $a^3>b^3$；③ $a^2+1>b^2+1$；④ $2^a>2^b$．

A．② ③　　B．① ③　　C．③ ④　　D．② ④

3．已知a，b满足$0<a<b<1$，下列不等式中成立的是（　　）

A．$a^a<b^b$　　B．$a^a<b^a$　　C．$b^b<a^b$　　D．$b^b>b^a$

4．已知a，b，c，d为实数，且$c>d$，则“$a>b$”是“$a-c>b-d$”的（　　）

A．充分但不必要条件　　B．必要但不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．设$a=\log_3 2$，$b=\ln 2$，$c=5^{-\frac{1}{2}}$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

6．已知$50<a<74$，$4<b<20$，则$a-b$的取值范围是_____.

7．下列四个不等式：①$a<0<b$；②$b<a<0$；③$b<0<a$；④$0<b<a$．其中能使$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$成立的充分条件有_____.

8．比较$1+\log_x 3$与$2\log_x\sqrt{3}$（$x>0$且$x\neq 1$）的大小.

二、直击高考

1．（2013年单招试题）若$a<b<0$，则下列不等式成立的是（　　）

A．$3^a<3^b$　　B．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C．$3^{-a}>4^{-a}$　　D．$(\frac{1}{4})^a<(\frac{1}{4})^b$

2．（2004年单招试题）$a>0$且$b>0$是$ab>0$的（　　）

A．充要条件　　B．必要但不充分条件

C．充分但不必要条件　　D．以上均不对

3．（2001年单招试题）已知$a<b<0$，那么下列不等式中一定成立的是（　　）

A．$ab<0$　　B．$|a|<|b|$　　C．$a^2<b^2$　　D．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

【提炼反思】

1．认识现实世界中的等量关系是相对的，不等关系比等量关系更具有普遍性.

2．对不等式性质，关键是正确理解和运用，要弄清每一个性质的条件和结论，以及条件与结论之间的相互联系；不等式性质包括“单向性”和“双向性”两个方面，单向性主要用于证明不等式，双向性是解不等式的基础．因为解不等式要求的是同解变形.

3．利用不等式的基本性质解决有关范围问题时，应尽量整体处理，采用整体代入的思想是解此类题的关键，避免多次使用不等式的性质扩大所求量的范围.

4．从知识的联系上看，不等式的性质与函数的单调性是相互联系的，因此比较一些实数大小的问题，从不等式性质与函数性质结合的角度去认识是必要的.

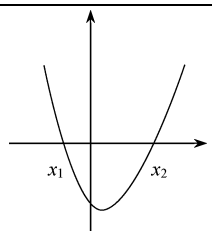
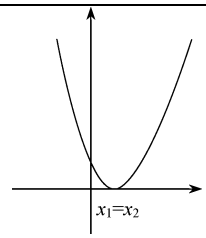
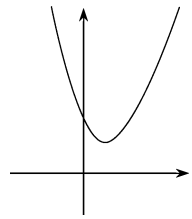
第 2 讲　解不等式

【夯实基础】

1．区间：区间是指一定范围内的所有实数所构成的集合，也就是数轴上某一“段”的所有点所对应的所有实数．

★集合 $\{x\,|\,3-x>1\}$ 用区间表示为_____．

2. 解一元二次不等式：①先解方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$；②作函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像；③根据图像确定不等式的解集．

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$ 的根	有两不相等的实根 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$	有两相等的实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$y=ax^2+bx+c$ 的图像			
$ax^2+bx+c>0$ 的解集	$(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,+\infty)$	$\{x\,|\,x\neq -\dfrac{b}{2a}\}$	**R**
$ax^2+bx+c\geqslant 0$ 的解集	$(-\infty,\ x_1]\cup[x_2,+\infty)$	**R**	**R**
$ax^2+bx+c<0$ 的解集	$(x_1,\ x_2)$	$\varnothing$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\leqslant 0$ 的解集	$[x_1,\ x_2]$	$\{x_1\}$	$\varnothing$

任何一个一元二次不等式经过不等式的同解变形后，都可以化为 $ax^2+bx+c>0$（或<0）（其中 a>0）的形式，再根据“大于取两边，小于夹中间”求解集．

★不等式 $(x+5)(3-2x)\geqslant 6$ 的解集是_____．

3．利用一元二次不等式的解与对应一元二次方程根的关系解题．

★不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是 $(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3})$，则 $a+b=$_____．

4．二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立的条件：$\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$；二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 恒成

立的条件：$\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$.

★若 $ax^2+x+a<0$ 的解集为 $\varnothing$，则实数 a 的取值范围为_____.

5．含绝对值的不等式的同解原理源于实数绝对值的定义．若 $x\in\mathbf{R}$，$a\in\mathbf{R}^+$，$|x|\geqslant 0$ 恒成立；$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$；$|x|>a \Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$.

★绝对值大于 2 且不大于 5 的最小整数是_____.

6．解含绝对值的不等式的总体思想是：将含绝对值的不等式转化为不含绝对值的不等式求解．去绝对值方法：

（1）定义法：$|a|=\begin{cases} a(a\geqslant 0) \\ -a(a<0) \end{cases}$，对含有多个绝对值的不等式利用零点分段法.

★不等式 $|x-5|-|2x+3|<1$ 解集为_____.

（2）平方法：$|f(x)|\leqslant|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)\leqslant g^2(x)$.

★不等式 $|2x-1|-|x-2|<0$ 的解集为_____.

（3）同解变形法，其同解定理有：

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
$\|x\|>a$ 的解集	$(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$	$\{x\mid x\neq 0\}$	$\mathbf{R}$
$\|x\|\geqslant a$ 的解集	$(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$\|x\|<a$ 的解集	$(-a,\ a)$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\|x\|\leqslant a$ 的解集	$[-a,\ a]$	$\{0\}$	$\varnothing$

★ 不等式 $|x+5|\geqslant 2$ 的解集为_____.

【方法导引】

【例 2-2-1】 求 a，b 的值，使得关于 x 的不等式 $ax^2+bx+a^2-1\leqslant 0$ 的解集分别是：（1）$[-1,\ 2]$；（2）$(-\infty,-1][2,+\infty)$；（3）$\{2\}$.

【解】（1）由题意得：$\begin{cases} -1+2=-\dfrac{b}{a} \\ -1\times 2=\dfrac{a^2-1}{a} \\ a>0 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a=\sqrt{2}-1 \\ b=1-\sqrt{2} \end{cases}$.

（2）由题意得：$\begin{cases}-1+2=-\dfrac{b}{a}\\ -1\times 2=\dfrac{a^2-1}{a}\\ a<0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-\sqrt{2}-1\\ b=1+\sqrt{2}\end{cases}$.

（3）由题意得：$\begin{cases}\Delta=b^2-4a(a^2-1)=0\\ 2+2=-\dfrac{b}{a}\\ 2\times 2=\dfrac{a^2-1}{a}\\ a>0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=2+\sqrt{5}\\ b=-8-4\sqrt{5}\end{cases}$.

【例 2-2-2】　已知函数 $f(x)=\lg(ax^2+2ax+1)$ 的定义域为 **R**，求 a 的取值范围.

【解】由题意知：$ax^2+2ax+1>0$ 的解集为 **R**，

当 $a=0$ 时，原不等式即为 $1>0$ 恒成立，∴ $a=0$；

当 $a\neq 0$ 时，$\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ 4a^2-4a<0\end{cases}\Rightarrow 0<a<1$，

综上得 a 的取值范围是 $[0，1)$.

【例 2-2-3】　a 为何值时，二次方程 $2x^2+4ax+3a-1=0$ 有两个负根？

【解】设二次方程 $2x^2+4ax+3a-1=0$ 的两根为 x_1，x_2，由题意得：

$$\begin{cases}\Delta=(4a)^2-4\times 2(3a-1)\geqslant 0\\ x_1+x_2=-2a<0\\ x_1x_2=\dfrac{3a-1}{2}>0\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{3}<a\leqslant\frac{1}{2}\text{或}a\geqslant 1,$$

所以当 $a\in(\dfrac{1}{3}，\dfrac{1}{2}]\cup[1，+\infty)$ 时，二次方程 $2x^2+4ax+3a-1=0$ 有两个负根.

【例 2-2-4】　设函数 $f(x)=|x-a|+3x$，其中 $a>0$.（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 的解集；（2）若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\{x\,|\,x\leqslant -1\}$，求 a 的值.

【解】（1）当 $a=1$ 时，不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 可化为 $|x-1|\geqslant 2$，所以 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3$，

所以不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 的解集为 $(-\infty，-1]\cup[3，+\infty)$.

（2）因为 $f(x)\leqslant 0$，所以 $|x-a|+3x\leqslant 0$ 可化为

$$\begin{cases}x\geqslant a\\ x-a+3x\leqslant 0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x\leqslant a\\ a-x+3x\leqslant 0\end{cases}\text{即}\begin{cases}x\geqslant a\\ x\geqslant\dfrac{a}{4}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x\leqslant a\\ x\leqslant-\dfrac{a}{2}\end{cases},$$

因为 $a>0$，所以该不等式的解集为 $\{x\,|\,x\leqslant-\dfrac{a}{2}\}=\{x\,|\,x\leqslant -1\}$ 即 $-\dfrac{a}{2}=-1$，

所以 $a=2$.

【实战演练】

一、达标检测

1．不等式$|x+4|>2$的解集是（　　）

A．$\{x|-6<x<6\}$　　B．$\{x|-2<x<2\}$

C．$\{x|x<-2$或$x>2\}$　　D．$\{x|x<-6$或$x>-2\}$

2．不等式$x^2-2|x|-2<0$（$x\in\mathbf{R}$）的解集是（　　）

A．$\{x|-2<x<2\}$　　B．$\{x|x<-2$或$x>2\}$

C．$\{x|-1<x<1\}$　　D．$\{x|x<-1$或$x>1\}$

3．设函数$f(x)=\begin{cases}2^{1-x} & x\leqslant 1\\ 1-\log_2 x & x>1\end{cases}$，则满足$f(x)\leqslant 2$的$x$的取值范围是（　　）

A．$[-1,2]$　　B．$[0,2]$　　C．$[1,+\infty)$　　D．$[0,+\infty)$

4．若不等式$|x-a|<b$的解集为$\{x|-1<x<2\}$，则a，b的值分别为（　　）

A．$a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{3}{2}$　　B．$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$

C．$a=-\frac{1}{2}$，$b=-\frac{3}{2}$　　D．$a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$

5．不等式$\frac{|x+1|}{|x+2|}\geqslant 1$的解集为_____.

6．已知$\{x|ax^2-ax+1<0\}=\varnothing$，则实数$a$的取值范围为_____.

7．已知关于x的方程$x^2+ax+a^2-1=0$有一正根和一负根，求a的取值范围.

8．已知关于x的不等式$ax^2+2x+c>0$的解集为$(-\frac{1}{3},\frac{1}{2})$，求不等式$-cx^2+2x-a>0$的解集.

二、直击高考

1．（2010年单招试题）解不等式$|2x-3|<1$.

2．（2006年单招试题）解不等式：$\log_2(8-2x-x^2)\leqslant 3$.

3．（2003 年单招试题）下列不等式中，解集为 **R** 的是　　（　　）

A．$x^2+4x+4>0$　　B．$\frac{5}{2x}-1<\frac{5}{2x}$

C．$2x^2+x+1>0$　　D．$|x-3|>0$

【提炼反思】

1．解不等式的基本思路是等价转化，把要求解的不等式转化为一元一次不等式或一元二次不等式，进而获得解决．

2．在转化的过程中一定要注意变换的等价性，等价变换的重要依据是不等式的性质．

3．含参数的不等式的解法，除按一般不等式的方法求解外，还要注意参数对不等式解集的影响，对参数可按不同分类标准分类讨论，如：按一元二次不等式中二次项系数的符号分类，按根的大小分类等．

4．解含绝对值的不等式的总体思想是：将含绝对值的不等式转化为不含绝对值的不等式求解．

第 3 讲　线性规划初步

【夯实基础】

1．二元一次不等式（组）表示平面区域

（1）作二元一次不等式 $Ax+By+C>0$（或 $Ax+By+C<0$）表示的平面区域的步骤：

① 在平面直角坐标系中作出直线 $Ax+By+C=0$．

② 在直线的一侧任取一点 $P(x_0, y_0)$，特别地，当 $C\neq 0$ 时，常把原点作为特殊点．

③ 若 $Ax_0+By_0+C>0$，则包含点 P 的半平面为不等式 $Ax+By+C>0$ 所表示的平面区域，不包含点 P 的半平面为不等式 $Ax+By+C<0$ 所表示的平面区域．

★若点(0, 0)在直线 $3x-2y+a=0$ 的上方区域，则点(1, 3)在此直线的下方还是上方区域？

（2）对于直线 $Ax+By+C=0(A>0)$

当 $B>0$ 时，$Ax+By+C>0$ 表示直线 $Ax+By+C=0$ 的上方区域；$Ax+By+C<0$ 表示直线 $Ax+By+C=0$ 的下方区域．

当 $B<0$ 时，$Ax+By+C>0$ 表示直线 $Ax+By+C=0$ 的下方区域；$Ax+By+C<0$ 表示直线 $Ax+By+C=0$ 的上方区域．

（3）可在直线的某一侧任取一点，一般取特殊点(x_0, y_0)，从 Ax_0+By_0+C 的正、负来判断 $Ax+By+C>0$（或 $Ax+By+C<0$）所表示的平面区域．

说明：

① 对于不含边界的区域，要将边界画成虚线；包含边界的区域，要将边界画成实线．

② 二元一次不等式组表示的平面区域，是各个不等式所表示的平面区域的公共部分．

★若点（−2，t）在直线 $2x-3y+6=0$ 下方区域，则实数 t 的取值范围为_____.

2．线性规划的基本概念

名　称	意　义
约束条件	由变量 x，y 组成的不等式（组）
线性约束条件	由 x，y 的一次不等式（或方程）组成的不等式组
目标函数	关于 x，y 的函数解析式，如 $z=2x-3y$
线性目标函数	关于 x，y 的一次解析式
可行解	满足线性约束条件的解（x，y）
可行域	所有可行解组成的集合
最优解	使目标函数取得最大值或最小值的可行解
线性规划问题	在线性约束条件下求线性目标函数的最大值或最小值问题

★设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x\geqslant y\\ 2x-y\leqslant 1\end{cases}$，则 $z=3x+2y$ 的最大值是 _____.

3．线性规划问题的标准形式

（1）线性规划问题的标准形式。

$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\ x_1，x_2，\cdots，x_n\geqslant 0\end{cases}$，其中 $b_i\geqslant 0$（$i=1，2，3，\cdots，m$）.

（2）如果得到的线性规划问题不是标准形式，可按如下方法化为标准形式。

① 对于目标函数，如果是 $\min z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$，则令 $z'=-z$，就得到 $\max z'=-(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n)$.

② 对于约束条件，如果有 $b_i<0$，则在不等式两边乘以“−1”.

③ 对于约束条件中的不等式，如果是“≤”，则在左边加上一个变量使其成为等式；如果是“≥”，则在左端减去一个变量使其成为等式．这时约束条件就成为约束方程．我们把添加的变量称为人工变量．因为人工变量并不产生效益，所以规定其在目标函数中的系数为零．

★将线性规划问题.

$\min z=2x_1+3x_2$.

$\begin{cases}3x_1+5x_2\geqslant 45\\ 5x_1+6x_2\leqslant 50\\ x_1\geqslant 0\\ x_2\geqslant 0\end{cases}$ 化为标准形式_____.

4．用图解法解决简单的线性规划问题的基本步骤

（1）寻找线性约束条件，线性目标函数；

（2）由二元一次不等式表示的平面区域作出可行域；

（3）在可行域内求目标函数的最优解.

★如果实数 x、y 满足条件 $\begin{cases} x-y+1\geqslant 0 \\ y+1\geqslant 0 \\ x+y+1\leqslant 0 \end{cases}$，那么 $2x-y$ 的最大值为_____.

5．最优整数解常用的三种处理方法

（1）平移直线法：先在可行域中画网格，再描整点，平移直线 l，最先经过或最后经过的整点坐标就是最优解，此方法的关键是作图要准确.

（2）检验优值法：当可行域中整点个数较少时，可将整点坐标逐一代入目标函数求值，经过比较得出最优解.

（3）局部调整法：先求非整点最优解，确定区域内点的横坐标范围，确定 x 的所有整数值，再代回原不等式组，得出 y 的一元一次不等式组，再确定 y 的所有相应整数值.

★不等式组 $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ 4x+3y<12 \end{cases}$ 表示的平面区域内的整点（横坐标和纵坐标都是整数的点）共有_____个.

6．用表格法和 Excel 解线性规划问题的基本步骤

（1）用表格法解线性规划问题的步骤：①建表；②确定换入变量；③确定换出变量；④进行行变换；⑤得出最优解.

（2）用 Excel 解线性规划问题的步骤：①选中“加载宏”中的“规划求解”选项；②输入相关项目和数据，设定输出区域；③输入相关公式；④在“规划求解参数”框中输入最值和可变单元格；⑤添加约束条件；⑥确定输入；⑦求解得出结果.

★下表是某线性规划问题的初始表格.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	2	1	1	0	10
x_4	4	2	0	1	4
	4	3	0	0	

其中换入变量应该是_____，换出变量应该是_____.

【方法导引】

【例 2-3-1】（1）画出不等式 $2x+y-6<0$ 表示的平面区域.

（2）画出不等式组 $\begin{cases} x-y+5\geqslant 0 \\ x+y\geqslant 0 \\ x\leqslant 3 \end{cases}$ 表示的平面区域.

【解】（1）先画直线 $2x+y-6=0$（画成虚线），取原点（0，0），代入 $2x+y-6$，∵ $2\times 0+0-6=-6<0$，∴原点在 $2x+y-6<0$ 表示的平面区域内，不等式 $2x+y-6<0$ 表示的区域如图 2-3-1（a）所示.

（2）不等式 $x-y+5\geqslant 0$ 表示直线 $x-y+5=0$ 上及右下方的点的集合，$x+y\geqslant 0$ 表示直线 $x+y=0$ 上及右上方的点的集合，$x\leqslant 3$ 表示直线 $x=3$ 上及左方的点的集合．不等式组表

示平面区域即为图 2-3-1（b）所示的三角形区域.

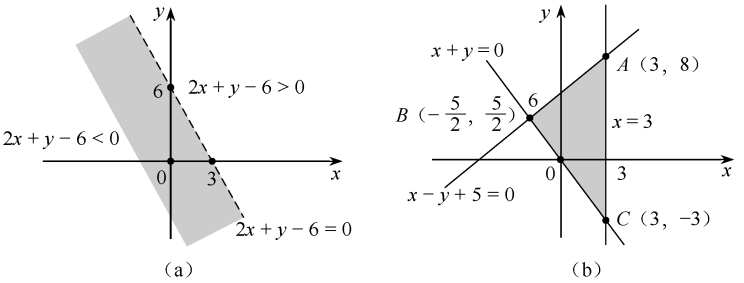


图 2-3-1

【例 2-3-2】 求 $z=3x+5y$ 的最大值和最小值，使式中的 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}5x+3y\leqslant 15\\ y\leqslant x+1\\ x-5y\geqslant 3\end{cases}$

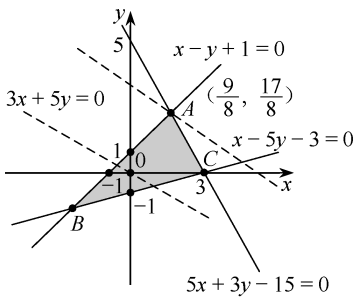


图 2-3-2

【解】不等式组所表示的平面区域如图 2-3-2 所示：

从图示可知，直线 $3x+5y=t$ 在经过不等式组所表示的公共区域内的点时，以经过点 $(-2,-1)$ 的直线所对应的 t 最小，以经过点 $(\frac{9}{8},\frac{17}{8})$ 的直线所对应的 t 最大.

$$\therefore z_{\min}=3\times(-2)+5\times(-1)=-11,\quad z_{\max}=3\times\frac{9}{8}+5\times\frac{17}{8}=14.$$

【例 2-3-3】 求 $z=600x+300y$ 的最大值，使式中的 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+y\leqslant 300\\ x+2y\leqslant 250\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{cases}$ 的整数值.

【解】可行域如图 2-3-3 所示，

四边形 $AOBC$，易求点 A (0，126)，B (100，0)，由方程组：

$$\begin{cases}3x+y=300\\ x+2y=252\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=69\frac{3}{5}\\ y=91\frac{1}{5}\end{cases}$$

得点 C 的坐标为 $(69\frac{3}{5},\ 91\frac{1}{5})$

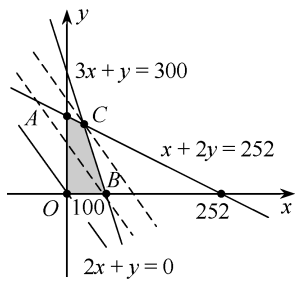


图 2-3-3

因题设条件要求整点 $(x,\ y)$ 使 $z=600x+300y$ 取最大值，将点 (69，91)，(70，90) 代入 $z=600x+300y$，可知当 $\begin{cases}x=70\\ y=90\end{cases}$ 时，z 取最大值为 $z_{\max}=600\times 70+300\times 90=69000.$

【例 2-3-4】 某工厂生产甲、乙两种产品. 已知生产甲种产品 1 吨，需耗 A 种矿石 10 吨、B 种矿石 5 吨、煤 4 吨；生产乙种产品 1 吨，需耗 A 种矿石 4 吨、B 种矿石 4 吨、煤 9 吨. 每 1 吨甲种产品的利润是 600 元，每 1 吨乙种产品的利润是 1000 元. 工厂在生产这两种产品的计划中要求消耗 A 种矿石不超过 300 吨、B 种矿石不超过 200 吨、煤不超过 360 吨，甲、乙两

种产品应各生产多少（精确到0.1吨），能使利润总额达到最大？

【解】将已知数据列成下表：

资源 \ 消耗量 \ 产品	甲产品（吨）	乙产品（吨）	资源限额（吨）
A种矿石（吨）	10	4	300
B种矿石（吨）	5	4	200
煤（吨）	4	9	360
利润（元）	600	1000	

设生产甲、乙两种产品分别为 x 吨、y 吨，利润总额为 z 元，

那么 $\begin{cases}10x+4y\leqslant 300\\5x+4y\leqslant 200\\4x+9y\leqslant 360\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$

目标函数为：$z=600x+1000y$.

作出以上不等式组所表示的平面区域，即可行域，如图 2-3-4 所示.

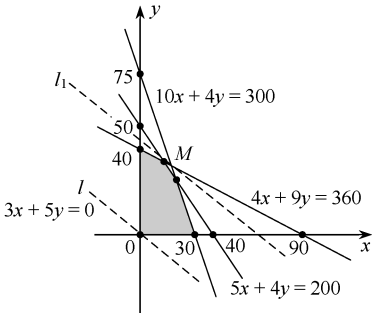


图 2-3-4

作直线 l：$600x+1000y=0$，即直线 l：$3x+5y=0$，

把直线 l 向右上方平移至 l_1 的位置时，直线经过可行域上的点 M，且与原点距离最大，此时 $z=600x+1000y$ 取最大值.

解方程组 $\begin{cases}5x+4y=200\\4x+9y=360\end{cases}$

得 M 的坐标为 $x=\dfrac{360}{29}\approx 12.4$，$y=\dfrac{1000}{29}\approx 34.4$.

答：应生产甲产品约 12.4 吨，乙产品 34.4 吨，能使利润总额达到最大.

【实战演练】

一、达标检测

1．双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两条渐近线与直线 $x=3$ 围成一个三角形区域，表示该区域的不等式组是（　　）

A．$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\geqslant 0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$　　B．$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\leqslant 0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$　　C．$\begin{cases}x-y\leqslant 0\\x+y\leqslant 0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$　　D．$\begin{cases}x-y\leqslant 0\\x+y\geqslant 0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$

2．设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}y\geqslant x\\x+2y\leqslant 2\\x\geqslant -2\end{cases}$，则 $z=x-3y$ 的最小值是（　　）

A．–2　　B．–4　　C．–6　　D．–8

3．设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 3x+4y \geqslant 4 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$，则 x^2+y^2+2x 的最小值是（　　）

A．$\frac{2}{5}$　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$\frac{24}{25}$　　D．1

4．某加工厂用某原料由甲车间加工出 A 产品，由乙车间加工出 B 产品．甲车间加工一箱原料需耗费工时 10 小时，可加工出 7 千克 A 产品，每千克 A 产品获利 40 元，乙车间加工一箱原料需耗费工时 6 小时，可加工出 4 千克 B 产品，每千克 B 产品获利 50 元．甲、乙两车间每天共能完成至多 70 箱原料的加工，每天甲、乙两车间耗费工时总和不得超过 480 小时，甲、乙两车间每天总获利最大的生产计划为（　　）

A．甲车间加工原料 10 箱，乙车间加工原料 60 箱

B．甲车间加工原料 15 箱，乙车间加工原料 55 箱

C．甲车间加工原料 18 箱，乙车间加工原料 50 箱

D．甲车间加工原料 40 箱，乙车间加工原料 30 箱

5．目标函数 $z=2x-y$，将其看成直线方程时，z 的意义是（　　）

A．该直线的横截距　　B．该直线的纵截距

C．该直线的纵截距的相反数　　D．该直线的纵截距的一半

6．不等式组 $\begin{cases} x-y+5 \geqslant 0 \\ x+y \geqslant 0 \\ x \leqslant 3 \end{cases}$，表示的平面区域的面积为_____.

7．求 $z=x+2y$ 的最大值和最小值，使式中的 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x-5y+21 \geqslant 0 \\ x-3y+7 \leqslant 0 \\ 2x+y-7 \leqslant 0 \end{cases}$.

8．如果直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2+kx+my-4=0$ 相交于 M，N 两点，且点 M，N 关于直线 $x+y=0$ 对称，求不等式组 $\begin{cases} kx-y+1 \geqslant 0 \\ kx-my \leqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域的面积.

二、直击高考

（2014 年单招试题）已知生产每吨甲产品需用 A 原料 3 吨、B 原料 2 吨；生产每吨乙产品需用 A 原料 1 吨、B 原料 3 吨．销售每吨甲产品可获利 5 万元，销售每吨乙产品可获利 3 万元．该公司在一个生产周期内消耗 A 原料不超过 13 吨、B 原料不超过 18 吨．问该公司在本生产周期内生产甲、乙两种产品各多少吨时，可获得最大利润？并求最大利润（单位：万元）．

【提炼反思】

1．会从实际情境中抽象出二元一次不等式组，了解二元一次不等式的几何意义，能用平面区域表示二元一次不等式组．

2．解有关线性规划问题的步骤：①由题意设变量：建立目标函数，列出关系图表；②列出线性约束条件；③画出可行域；作线性目标函数对应的直线，并在可行域内平移，确定最优解及目标函数的最值；④根据结果回答问题．

3．当可行域的边界顶点不是整点（横、纵坐标均为整数），则它不是最优整数解，此时必须在可行域内该点的附近调整为整点．常用调整方法有：

（1）平移直线法：先在可行域内打网格，再描整点，平移直线 l，最先经过或最后经过的整点坐标是最优整数解．

（2）检验优值法：当可行域内整点个数较少时，也可将整点坐标逐一代入目标函数求值，经比较得出最优解．

（3）调整优值法：先求非整点最优解及最优值，再借助不定方程知识调整最优值，最后筛选出最优整数解．

4．解答线性规划的实际应用问题应注意的问题：

（1）在线性规划问题的应用中，常常是题中的条件较多，因此认真审题非常重要；

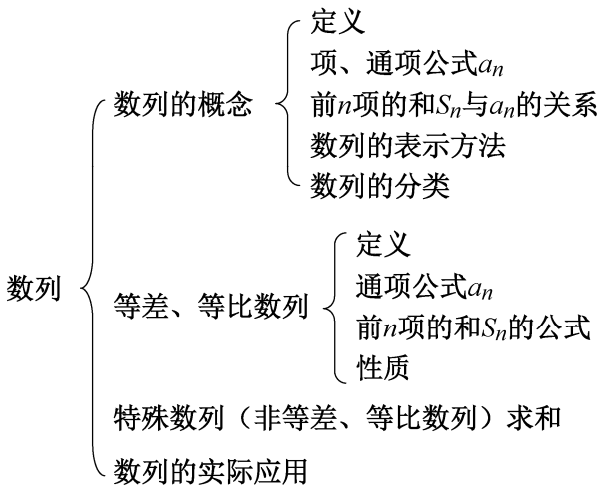
（2）线性约束条件中有无等号要依据条件加以判断；

（3）结合实际问题，未知数 x，y 等是否有限制，如 x，y 为正整数、非负数等；

（4）图对解决线性规划问题至关重要，关键步骤基本上是在图上完成的，所以作图应尽可能准确，图上操作尽可能规范．

专题三　数　　列

【思维导航】



【考点梳理】

考　　点	要　　求
数列的概念	了解
等差数列	理解
等比数列	理解
数列的实际应用	掌握

第 1 讲　数列与等差数列

【夯实基础】

1．数列

（1）定义：按一定的次序排列的一列数叫数列，数列中的每一个数都叫这个数列的项，各项依次叫做第 1 项，第 2 项，…，第 n 项，……

★设数列 $\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$2\sqrt{2}$，$\sqrt{11}$，…，则 $2\sqrt{5}$ 是这个数列的第_____项.

（2）通项公式：如果数列的第 n 项与 n 之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公

式叫这个数列的通项公式.

注意：①不是所有数列都能写出其通项公式，如数列：3，3.1，3.14，3.141，3.1415，…；

② 一个数列的通项公式有时是不唯一的，如数列：1，0，1，0，1，0，…，它的通项公式可以是 $a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$，也可以是 $a_n=|\cos\frac{n+1}{2}\pi|$，还可以是 $a_n=\begin{cases}1,(n\text{为奇数})\\0,(n\text{为偶数})\end{cases}$；

③ 数列是一个定义域为正整数集 $\mathbf{N}^*$（或它的有限子集 $\{1,2,3,\cdots,n\}$）的特殊函数，数列的通项公式也就是相应函数的解析式．数列是特殊的函数，解题时可以用函数的思想来解决；

④ 数列对应的图像是一群孤立的点.

★$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ -\frac{1}{32},\ \cdots$的一个通项公式是_____.

（3）数列的通项公式 a_n 与前 n 项的和 S_n 的关系：

① $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$；② $a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2)\end{cases}$.

★设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2S_{n+1}+a_n^2$，$a_2=-1$，则数列 $\{a_n\}$ 的首项为_____.

2．等差数列

（1）定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于同一个常数 d，那么这个数列叫等差数列，常数 d 称为等差数列的公差.

★在等差数列 -1，3，7，11，x，19，23，…中，$x=$_____.

（2）判定方法：定义法 $a_{n+1}-a_n=d$（d 为常数）或 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$（$n\geqslant 2$）$\Leftrightarrow\{a_n\}$ 是等差数列；中项公式法 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$（$n\in\mathbf{N}^*$）$\Leftrightarrow\{a_n\}$ 是等差数列.

★设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+2a_{n+1}$，试判断数列 $\{b_n\}$ 是否成等差数列，证明你的结论.

（3）通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$ 或 $a_n=a_m+(n-m)d$　（m，$n\in\mathbf{N}^*$）.

★在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$2a_{n+1}-2a_n=1$，则 a_{11} 的值为_____.

（4）前 n 项的求和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n=An^2+Bn$

★设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_4=14$，$S_{10}-S_7=30$，则 $S_9=$_____.

（5）等差中项：如果 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项．即：A 是 a 与 b 的等差中项 $\Leftrightarrow 2A=a+b\Leftrightarrow a$，$A$，$b$ 成等差数列.

★等差数列 $\{a_n\}$ 前三项为 $\frac{1}{x+1}$，$\frac{5}{6x}$，$\frac{1}{x}$，则 $a_{101}=$_____.

（6）相关的性质：

① 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，当 $m+n=p+q$ 时，有 $a_m+a_n=a_p+a_q$．特别地，当 $m+n=2p$ 时，有 $a_m+a_n=2a_p$（m，n，p，$q\in\mathbf{N}^*$）.

★设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{12}=21$，则 $a_2+a_5+a_8+a_{11}=$_____.

② 设等差数列前 n 项的和为 S_n，相继 n 项的和 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，… 也成等差数列.

★设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 30，前 $2m$ 项和为 100，则它的前 $3m$ 项和为_____.

③“首正”的递减等差数列中，前 n 项和的最大值是所有非负项之和；“首负”的递增等差数列中，前 n 项和的最小值是所有非正项之和.

方法一：由不等式组 $\begin{cases}a_n\geqslant 0\\ a_{n+1}\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_n\leqslant 0\\ a_{n+1}\geqslant 0\end{cases}$ 确定出前多少项为非负（或非正）；

方法二：因等差数列前 n 项是关于 n 的二次函数，故可转化为求二次函数的最值，但要注意数列的特殊性 $n\in\mathbf{N}^*$.

★数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=2n-49$，当数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 取得最小值时，$n=$_____.

【方法导引】

【例 3-1-1】 已知下列数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，分别求它们的通项公式 a_n.

（1）$S_n=2n^2+n$；（2）$S_n=2^n-3$.

【解】（1）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2\times1+1=3$

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+n-[2(n-1)^2+(n-1)]=4n-1$

综上得 $a_n=4n-1$.

（2）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2^1-3=-1$

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-3-(2^{n-1}-3)=2^{n-1}$

综上得 $a_n=\begin{cases}-1 & n=1\\ 2^{n-1} & n\geqslant 2\end{cases}$.

【例 3-1-2】 已知四个数成等差数列，这四个数的和为 14，第一个数与第四个数的积比第二个数与第三个数的积少 18，求这四个数.

【解】设四个数为 $a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$，由题意得

$$\begin{cases}a-3d+a-d+a+d+a+3d=14\\ (a-3d)(a+3d)+18=(a-d)(a+d)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{2}\\ d=\dfrac{3}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=\dfrac{7}{2}\\ d=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

所以这四个数是 8，5，2，−1 或 −1，2，5，8.

【例 3-1-3】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=-11$，$a_4-a_6=-6$，求当 S_n 取最小值时 n 的值.

【解】解法一：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由题意得 $d=\dfrac{a_6-a_4}{6-4}=3$

$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{25}{2}n=\dfrac{3}{2}(n-\dfrac{25}{6})^2-\dfrac{625}{24}$，$\because n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore n=4$

所以当 $n=4$ 时，S_n 取最小值.

解法二：设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和取得最小值，由题意得

$$\begin{cases}a_n\leqslant 0\\ a_{n+1}\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3n-14\leqslant 0\\ 3n-11\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\frac{11}{3}\leqslant n\leqslant\frac{14}{3},\ \because n\in\mathbf{N}^*,\ \therefore n=4$$

所以当 $n=4$ 时，S_n 取最小值.

【例 3-1-4】　在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=8$，$a_4=2$，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 满足 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=a_{2n-1}+a_{2n}$（$n\in\mathbf{N}^*$），问数列 $\{b_n\}$ 是否是等差数列？证明你的结论.

【解】（1）$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0\Rightarrow a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，

$$a_1=8,\ a_4=2\Rightarrow d=\frac{a_4-a_1}{4-1}=-2\Rightarrow a_n=10-2n.$$

（2）$a_{2n-1}=12-4n,\ a_{2n}=10-4n\Rightarrow b_n=22-8n\Rightarrow b_{n+1}-b_n=-8$

所以数列 $\{b_n\}$ 是等差数列.

【实战演练】

一、达标检测

1．在数列 1，3，6，10，15，21，x，36，45，…中，$x=$　　（　　）

A．26　　B．28　　C．29　　D．30

2．已知数列 $a_n=3n-1$，则 $S_3=$　　（　　）

A．5　　B．8　　C．10　　D．15

3．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3=8$，$a_5=12$，则 $a_n=$　　（　　）

A．$2n$　　B．$2n+1$　　C．$2n+2$　　D．$2n-2$

4．若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-10n$（$n\in\mathbf{N}^*$），则此数列的通项公式为 $a_n=$_____，数列 $\{na_n\}$ 中数值最小的项是第_____项.

5．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_n<0$，$a_3^2+a_8^2+2a_3a_8=9$，则 $S_{10}=$_____.

6．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2=1$，$a_5=-5$，则其前 n 项和 S_n 的最大值为_____.

7．已知公差大于 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_2+a_5=22$，$a_3a_4=117$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；（2）若数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，且 $b_n=\dfrac{S_n}{n+c}$，求常数 c.

8．数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\dfrac{1}{3}$，前 n 项的和为 S_n 满足 $S_{n+1}-S_n=(\dfrac{1}{3})^{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 和前 n 项的和 S_n；

（2）若 S_1，$t(S_1+S_2)$，$3(S_2+S_3)$ 成等差数列，求实数 t 的值.

二、直击高考

1.（2008 年单招试题）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2+a_n$，且 $a_2=-1$，则 $a_8=$ （　　）

A．13　　B．11　　C．9　　D．12

2.（2009 年单招试题）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，点（n，$\frac{S_n}{n}$）均在函数 $f(x)=3x+2$ 的图像上.

（1）求 a_1，a_2 及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）解不等式 $f(n)\geqslant S_n-22$.

【提炼反思】

1. 根据数列的前几项，写出它的一个通项公式，关键在于找出这些项与项数之间的关系，常用的方法有观察法、通项法，转化为特殊数列法等.

2．由 S_n 求 a_n 时，用公式 $a_n=S_n-S_{n-1}$，要注意 $n\geqslant 2$ 这个条件，a_1 应由 $a_1=S_1$ 来确定，最后看二者能否统一.

3．欲证 $\{a_n\}$ 为等差数列，最常见的方法是证明：$a_{n+1}-a_n=d$（d 是一个与 n 无关的常数）.

4．在研究等差数列问题时研究基本量 a_1，d 是基本方法，熟记并充分运用等差数列的性质将简化运算，提高解题的正确率.

5. 若三个数成等差数列时，关键是如何巧妙地设这三个数，一般是设为 $a-d$，a，$a+d$，再依题意列出方程求 a，d 即可.

6．遇到与等差数列有关的实际问题，须弄清是求项的问题还是求和的问题.

第 2 讲　等比数列

【夯实基础】

1．等比数列的定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与前一项的比等于同一个常数 q（$q\neq 0$），这个数列叫做等比数列，常数 q 称为等比数列的公比.

★等比数列1，3，9，x，81，…中，$x=$_____.

2．等比数列的判断方法：定义法 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$（q 为常数，其中 $q\neq 0$，$a_n\neq 0$）或 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}}$（$n\geqslant 2$）$\Leftrightarrow\{a_n\}$等比数列；中项公式法 $a_{n+1}^2=a_n a_{n+2}\Leftrightarrow\{a_n\}$是等比数列.

注意：公比 q 不能为零，等比数列中一定不会出现数 0.

★已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n$（$n\in\mathbf{N}^*$），则 $a_n=$_____.

3．等比数列的通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}$（$a_1a_mq\neq 0$，$n$，$m\in\mathbf{N}^*$）.

★在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2=\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{1}{4}$，$a_k=\frac{1}{64}$，则 $k=$_____.

4．等比数列前 n 项的和：当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$；当 $q\neq 1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$.

注意：等比数列前 n 项和公式有两种形式，为此在求等比数列前 n 项和时，首先要判断公比 q 是否为 1，再由 q 的情况选择求和公式的形式，当不能判断公比 q 是否为 1 时，要对 q 分 $q=1$ 和 $q\neq 1$ 两种情形讨论求解.

★设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_3=2S_2+1$，$a_4=2S_3+1$，则公比 $q=$_____.

5．等比中项：若 a，G，b 成等比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项.

注意：不是任何两数都有等比中项，只有同号两数才存在，且有两个等比中项 $\pm\sqrt{ab}$.

★已知三个数 x，$2x+2$，$3x+3$ 按一定顺序排列，可组成等比数列，则实数 x 的值为_____.

6．相关性质：

（1）在等比数列 $\{a_n\}$ 中，当 $m+n=p+q$ 时，有 $a_ma_n=a_pa_q$. 特别地，当 $m+n=2p$ 时，有 $a_ma_n=a_p{}^2$（m，n，p，$q\in\mathbf{N}^*$）.

★已知等比数列的公比为正数，且 $a_3a_9=2a_5^2$，$a_2=1$，则 $a_n=$_____.

（2）设等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和为 S_n，则相继 n 项的和 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，… ，也成等比数列.

注意：当公比 $q=-1$ 且 n 为偶数时，S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$（$n\in\mathbf{N}^*$）不成等比数列.

★设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和，若 $S_n=48$，$S_{2n}=60$，则 $S_{3n}=$_____.

【方法导引】

【例 3-2-1】 已知四个实数，前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，首末两数之和为 37，中间两数之和为 36，求这四个数.

【解】由题意可设四个数分别是 $a-d$，a，$a+d$，$37-a+d$

由已知得：$\begin{cases}a+a+d=36\\(a+d)^2=a(37-a+d)\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}a=\frac{81}{4}\\d=-\frac{9}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=16\\d=4\end{cases}$

所以四个数分别是 $\frac{99}{4}$，$\frac{81}{4}$，$\frac{63}{4}$，$\frac{49}{4}$ 或 12，16，20，25.

【例 3-2-2】 若 S_n 是公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 S_1，S_2，S_4 成等比数列.

（1）求数列 S_1，S_2，S_4 的公比；

（2）若 $S_2=4$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解】（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则由

$$S_2^2=S_1\cdot S_4\Rightarrow(2a_1+d)^2=a_1(4a_1+6d)\Rightarrow d=2a_1\Rightarrow q=\frac{S_2}{S_1}=\frac{a_1+a_2}{a_1}=4.$$

（2）$S_2=4$，$d=2a_1\Rightarrow S_2=2a_1+2a_1=4\Rightarrow a_1=1$，$d=2\Rightarrow a_n=2n-1$.

【例 3-2-3】 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=\frac{1}{3}$，公比 $q=\frac{1}{3}$.

（1）设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，证明：$S_n=\frac{1-a_n}{2}$；

（2）设 $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

【证明】（1）左边=$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}\left[1-(\frac{1}{3})^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{2}$,

右边=$\frac{1-a_n}{2}=\frac{1-a_1q^{n-1}}{2}=\frac{1-\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^{n-1}}{2}=\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{2}$，∴左边=右边，所以等式成立。

【解】（2）$b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$

$=\log_3(a_1a_2\cdots a_n)=\log_3[\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3})^2\cdots(\frac{1}{3})^n]$

$=\log_3(\frac{1}{3})^{1+2+\cdots+n}=-(1+2+\cdots+n)=-\frac{n^2+n}{2}$.

【例 3-2-4】 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+1}=(1+q)a_n-qa_{n-1}$（$n\geqslant 2$，$q\neq 0$）.

（1）设 $b_n=a_{n+1}-a_n$（$n\in\mathbf{N}^*$），证明：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【证明】（1）由题设 $a_{n+1}=(1+q)a_n-qa_{n-1}$（$n\geqslant 2$，$q\neq 0$）得 $a_{n+1}-a_n=q(a_n-a_{n-1})$ 即 $b_n=qb_{n-1}$，$n\geqslant 2$，又 $b_1=a_2-a_1=1$，$q\neq 0$，所以 $\{b_n\}$ 是首项为1，公比为 q 的等比数列

【解】（2）由（1）$a_2-a_1=1$，$a_3-a_2=q$，…，$a_n-a_{n-1}=q^{n-2}$（$n\geqslant 2$）

将以上各式相加得 $a_n-a_1=1+q+\cdots+q^{n-2}$

当 $q=1$ 时，$a_n=n$，当 $q\neq 1$ 时，$a_n=1+\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$

∴ $a_n=\begin{cases}1+\frac{1-q^{n-1}}{1-q} & q\neq 1\\ n & q=1\end{cases}$，上式对 $n=1$ 显然成立.

【实战演练】

一、达标检测

1．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3=2$，$a_6=\frac{1}{4}$，则公比 q 等于 （　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．-2　　C．2　　D．$\frac{1}{2}$

2．若数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2\cdot 3^n$，则该数列的前n项和S_n为（　　）

A．3^n-1　　B．$3^{n+1}-3$　　C．$2\cdot 3^{n+1}-6$　　D．$3^{n+1}-1$

3．若互不相等的实数a，b，c成等差数列，c，a，b成等比数列，且$a+3b+c=10$，则$a=$_____.

4．在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_1=1$且$q\neq\pm1$，且$a_m=a_1a_2a_3a_4a_5$，则$m=$_____.

5．若$3x$是$2x-1$和$4x+5$的等比中项，则$x=$_____.

6．在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_3=2$，$a_2+a_4=\frac{20}{3}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为_____.

7．已知数列$\{a_n\}$　满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，若$\{a_n+m\}$是等比数列.

（1）求m的值；

（2）求数列$\{\log_{\frac{1}{2}}(a_n+m)\}$的前$n$项的和$S_n$.

8．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_2=1$，$S_{11}=33$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=(\frac{1}{2})^{a_n}$，求证：$\{b_n\}$是等比数列.

二、直击高考

1．（2013年单招试题）若实数a，b，c成等比数列，则函数$y=ax^2+bx+c$的图像与x轴的交点个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．1或者2

2．（2014年单招试题）已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=A\cdot 2^n+B$，其中A，B是常数，且$a_1=3$.

（1）求数列$\{a_n\}$的公比q；

（2）求A，B的值及数列$\{a_n\}$的通项公式；

（3）求数列$\{S_n\}$的前项和T_n.

【提炼反思】

1．在等比数列的求和公式中，当公比 $q\neq1$ 时，适用公式 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，且要注意 n 表示项数；当 $q=1$ 时，适用公式 $S_n=na_1$；若 q 的范围未确定时，应对 $q=1$ 和 $q\neq1$ 讨论求和．

2．若三个数成等比数列时，关键是如何巧妙地设这三个数，一般是设为 $\dfrac{a}{q}$，a，aq，再依题意列出方程求 a，q 即可．

3．a_1 与 q 是等比数列 $\{a_n\}$ 中最活跃的两个基本量，熟记并充分运用等比数列的性质将简化运算，提高解题的正确率．

4．“巧用性质、减少运算量”在等比数列的计算中非常重要，但用“基本量法”并树立“目标意识”，“需要什么，就求什么”，既要充分合理地运用条件，又要时刻注意解题的目标，往往能取得与“巧用性质”解题相同的效果．在应用性质时要注意性质的前提条件，有时需要进行适当变形．

第3讲　数列的综合应用

【夯实基础】

1．等差数列与等比数列有很多类似的性质，应善于灵活运用这些性质解题，另外在使用性质时要注意两者的异同．

（1）等差数列的某些项或公差可能等于0，但等比数列的公比或任一项都不能为0；

（2）既是等差数列又是等比数列的数列只能是零数列以外的常数列．

★ $b^2=ac$ 是 a，b，c 成等比数列的（　　）

A．必要但不充分条件　　B．充分必要条件

C．充分但不必要条件　　D．既不必要也不充分条件

2．等差数列与等比数列的关系举例：

（1）$\{a_n\}$ 成等差数列 $\Leftrightarrow$ $\{b^{a_n}\}$ 成等比数列；

（2）$\{a_n\}$ 成等比数列 $\Leftrightarrow$ $\{\log_b a_n\}$ 成等差数列（$a_n>0$）．

★设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_{n+1}=1+\ln x_n$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=10$，则 $x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{30}$ 等于（　　）

A．$11e^{20}$　　B．$11e^{21}$　　C．$10e^{21}$　　D．$10e^{20}$

3．灵活运用通项公式与前 n 项和公式，并要注意运用函数的观点分析和解决相关问题．此外，在解决相关问题尤其是等比数列的相关问题时，常要用到方程（组）的思想、转化的思想、整体的思想等．

★在各项均为正数的等比数列中，若 $a_5a_6=9$，则 $\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}=$_____．

4．在解有关等差数列和等比数列的问题时，要仔细分析题目中的条件和结论的内容、特征与联系，熟练掌握等比、等差数列的通项公式，前 n 项和的公式，中项公式是解决等差、等比数列综合问题的关键．

★已知数列 $\{a_n\}$ 的递推公式是 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，且 $a_1=1$，$a_2=3$，计算数列的前几项，推测数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是_____．

5．如何求解数列应用题：

（1）建立数列模型时，应明确是等差数列模型还是等比数列模型？还是递推数列模型？是求 a_n 还是 S_n？还是求 n？

（2）建立数学模型的一般步骤：

① 审题：读熟，弄懂，抓关键词语；提纲挈领，或图表，或图形，弄清题中所出现的量和数学的含义．

② 建模：将问题简单化，符号化，尽量借鉴标准形式，建立数量关系式．

③ 计算：合理设计，确定最佳解题方案，求解纯数学问题．

④ 回归：解释并回答实际问题．

★一张报纸，其厚度为 a，现将报纸对折（即沿对边中点连线折叠）7 次，此时，报纸的厚度为（　　）

A．$8a$　　B．$64a$　　C．$128a$　　D．$256a$

【方法导引】

【例 3-3-1】　已知函数 $f(x)=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），若数列 2，$f(a_1)$，$f(a_2)$，…，$f(a_n)$，$2n+4$（$n\in\mathbf{N}^*$）成等差数列．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n；

（2）若 $a=2$，令 $b_n=a_nf(a_n)$，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $t<f(b_n)$，求实数 t 的取值范围．

【解】（1）由 $2n+4=2+(n+2-1)d\Rightarrow d=2$

所以 $f(a_n)=2+2(n+1-1)=2n+2=\log_a a_n\Rightarrow a_n=a^{2n+2}$．

（2）$b_n=a_nf(a_n)=(2n+2)a^{2n+2}=(n+1)\cdot 2^{2n+3}$

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{n+2}{n+1}\times 4>1\Rightarrow b_{n+1}>b_n$，所以数列 $\{b_n\}$ 为递增数列，最小项为 $b_1=2^6$，

对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $t<f(b_n)$，则 $t<f(b_n)_{\min}\Rightarrow t<f(b_1)=\log_2 2^6=6$

所以实数 t 的取值范围是 $t\in(-\infty,6)$．

【例 3-3-2】　设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_{n+1}=4a_n+2$（$n\in\mathbf{N}^*$），$a_1=1$．

（1）设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，求证：数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，

（2）设 $c_n=\frac{a_n}{2^n}$，求证：数列 $\{c_n\}$ 是等差数列.

【证明】（1）$S_{n+1}=4a_n+2$，$S_{n+2}=4a_{n+1}+2$，相减得 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$，

$\therefore a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$，又 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，$\therefore b_{n+1}=2b_n\Rightarrow\frac{b_{n+1}}{b_n}=2.$

又 $S_2=a_1+a_2=4a_1+2$，$a_1=1$，$\therefore a_2=5$，$b_1=a_2-2a_1=3$，

$\therefore \{b_n\}$ 是以 3 为首项，2 为公比的等比数列，$\therefore b_n=3\times2^{n-1}$.

（2）$\because c_n=\frac{a_n}{2^n}$，

$$\therefore c_{n+1}-c_n=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n+1}-2a_n}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^{n+1}}=\frac{3\times2^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{4}$$

$$c_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \{c_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，$\frac{3}{4}$ 为公差的等差数列.

【例 3-3-3】 从盛有浓度为 20%的盐水 2kg 的容器中倒出 1kg 盐水，然后加入 1kg 水，以后每次都倒出 1kg 盐水，然后再加入 1kg 水，问：

（1）第 5 次倒出的 1kg 盐水中含盐多少 kg？

（2）经 6 次倒出后，一共倒出多少 kg 盐？此时加 1kg 水后容器内盐水浓度为多少？

【解】（1）每次倒出的盐的质量所成的数列为 $\{a_n\}$，则：

$$a_1=0.2\text{kg}，\quad a_2=\frac{1}{2}\times0.2\text{kg}，\quad a_3=(\frac{1}{2})^2\times0.2\text{kg}$$

由此可见：$a_n=(\frac{1}{2})^{n-1}\times0.2\text{kg}$，$a_5=(\frac{1}{2})^{5-1}\times0.2=0.0125\text{kg}$.

（2）由（1）得 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_1=0.2$，$q=\frac{1}{2}$，

$$\therefore S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{0.2(1-\frac{1}{2^6})}{1-\frac{1}{2}}=0.39375\text{ kg}$$

$$0.4-0.39375=0.00625$$

$$0.00625\div2=0.003125=3.125\%.$$

【例 3-3-4】 某地区荒山 2200 亩，从 2005 年开始每年春季在荒山植树造林，第一年植树 100 亩，以后每一年比上一年多植树 50 亩.

（1）若所植树全部都成活，则到哪一年可将荒山全部绿化?

（2）若每亩所植树苗木材量为 2 立方米，每年树木木材量的自然增长率为 20%，那么全部绿化后的那一年年底，该山木材总量为 S，求 S 的表达式.

（3）若 $1.2^8\approx4.3$，计算 S（精确到 1 立方米）.

分析：由题意可知，各年植树亩数为：100，150，200，…成等差数列.

【解】（1）设植树 n 年可将荒山全部绿化，则：$100n+\frac{n(n-1)}{2}\times500=2200$

解之得 $n=8$ 或 $n=-11$（舍去），所以到 2012 年可将荒山全部绿化.

（2）2005 年所植树，春季木材量为 200m^3，到 2012 年年底木材量则增为 $200\times1.2^8\text{m}^3$.

2006 年所植树到 2012 年年底木材量为 $300\times1.2^7\text{m}^3$.

……

2012 年所植树到年底木材量为 $900\times1.2\text{m}^3$，则到 2012 年年底木材总量为：

$S=200\times1.2^8+300\times1.2^7+400\times1.2^6+\cdots+900\times1.2\,\text{m}^3$.

（3）$S=900\times1.2+800\times1.2^2+700\times1.2^3+\cdots+200\times1.2^8$

$1.2S=900\times1.2^2+800\times1.2^3+\cdots+300\times1.2^8+200\times1.2^9$，两式相减得：

$0.2S=200\times1.2^9+100(1.2^2+1.2^3+\cdots+1.2^8)-900\times1.2$

$$=200\times1.2^9+100\times\frac{1.2^2(1.2^7-1)}{1.2-1}-900\times1.2=1812$$

$\therefore S=9060\,\text{m}^3$.

【实战演练】

一、达标检测

1．某工厂去年 12 月份产值为 m，若月平均增长率为 r，则今年 12 月份的产值应为（　　）

A．mr　　B．$m(1+r)$　　C．$m(1+r)^{11}$　　D．$m(1+r)^{12}$

2．某种细菌在培养过程中，每 20 分钟繁殖一次，一个繁殖成 2 个，经过两小时，这种细菌一个可繁殖成（　　）

A．32 个　　B．64 个　　C．63 个　　D．128 个

3．某商品售价为 100 元，厂方为促进销售，决定每月下调 5%的售价，那么连续调价 3 个月后，该商品售价约为（　　）

A．81 元　　B．86 元　　C．88 元　　D．90 元

4．夏季高山上气温从山脚起每升高 100m 降低 0.7℃，已知山顶气温是 14.1℃，山脚的气温是 26℃，那么此山相对于山脚的高度是_____.

5．等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq0$，$a_1=9d$，a_k 是 a_1 与 a_{2k} 的等比中项，则 k 的值为_____.

6．在数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中，$a_1=2$，$4a_{n+1}-a_n=0$（$n\in\mathbf{N}^*$），b_n 是 a_n 与 a_{n+1} 的等比中项，则 $\{b_n\}$ 的通项公式为_____.

7．某厂在 2011 年年底制订生产计划，要使 2016 年年底的总产量在原有基础上翻两番，则年平均增长率为_____.

8．某林场有荒山 3250 亩，从 1996 年开始，每年春季在荒山上植树造林，第一年植树 100 亩，计划以后每年比上一年多植树 50 亩（假定全部成活）.

（1）需几年可将此荒山全部绿化？

（2）已知新植树苗每亩木材量为 2m^3，树木每年的自然增长率为 10%，设荒山全部绿化后的年底木材总量为 S，求 S 的最简表达式.

二、直击高考

1.（2006 年单招试题）若数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，则其前 10 项的和 S_{10} 等于（　　）

A. $\dfrac{9}{10}$　　B. $\dfrac{11}{10}$　　C. $\dfrac{10}{9}$　　D. $\dfrac{10}{11}$

2.（2010 年单招试题）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+2n$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

（1）求证：a_2 是 a_1，a_3 的等比中项；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【提炼反思】

1．等差数列和等比数列是两类最基本的数列，研究数列通项常通过转化，构造出新的数列使之成为等差或等比数列，进而利用等差、等比数列的知识进行求解.

2．求和的基本思想是“转化”．其一是转化为等差、等比数列的求和，或者转化为求自然数的方幂和，从而可用基本求和公式；其二是消项，把较复杂的数列求和转化为求不多的几项的和.

3．倒序相加和错位相减法是课本中分别推导等差、等比数列前 n 项和用到的方法，在复习中应给予重视.

4．等差、等比数列的概念、性质、通项公式、前 n 项和公式的应用是必考内容，数列与函数、三角、解析几何的综合应用问题是命题热点.

5．从解题思想方法的规律着眼，主要有：①方程思想的应用，利用公式列方程（组），例如等差、等比数列中的“知三求二”问题；②函数思想方法的应用、图像、单调性、最值等问题；③待定系数法、分类讨论等方法的应用.

专题四　函　　数

【思维导航】

- 函数
 - 函数的概念
 - 函数的基本概念
 - 函数的表示法
 - 函数的定义域和值域
 - 函数的基本性质
 - 函数的单调性、单调区间
 - 函数的奇偶性、性质及图像的特征
 - 一次函数、反比例函数和二次函数
 - 一次函数
 - 反比例函数
 - 二次函数
 - 幂、指数、对数运算
 - 幂的概念
 - 实数指数幂的运算法则
 - 指数式与对数式互化
 - 积、商、幂的对数运算法则
 - 对数的换底公式和倒数公式
 - 幂、指数、对数函数
 - 幂函数的定义、定义域、值域、图像及性质
 - 指数函数的定义、定义域、值域、图像及性质
 - 对数函数的定义、定义域、值域、图像及性质
 - 函数的实际应用

【考点梳理】

考　　点	要　　求
函数的概念	理解
函数的表示法	理解
函数的单调性	理解
函数的奇偶性	理解
函数的实际应用	掌握
实数指数幂	理解
幂函数	了解
指数函数	理解
对数的概念	理解
对数的运算	了解
对数函数	了解
指数函数、对数函数的实际应用	理解

第1讲　函数的基本概念

【夯实基础】

1．函数的定义

（1）函数的定义：设 A 是一个非空数集，如果对于集合 A 内的任意一个数 x，按照某个确定的法则 f，有唯一确定的数 y 与之对应，那么这种对应关系 f 就称为集合 A 上的函数，记作 $y=f(x)$，其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量．在函数 $y=f(x)$ 中，自变量 x 的取值集合叫做函数的定义域 D，因变量 y 的取值集合叫做函数的值域 M．

（2）一一对应函数的定义：如果 y 是 x 的函数，并且对于值域 M 中任一 y，在定义域 D 中存在唯一的 x，使 $y=f(x)$，则这样的函数叫做一一对应函数，它是函数的一种特殊情况．

★观察下面数集之间的对应关系：

① $D=\{x|x=2,3,4,5,6,7\}$，$M=\{y|y=1,2,3,4,5,6\}$，对应法则：$y=x-1$；

② $D=\{x|-1<x<2\}$，$M=\{y|0\leqslant y<4\}$，对应法则：$y=x^2$；

③ $D=\{x|x\in\mathbf{R}\}$，$M=\{y|y\in\mathbf{R}\}$，对应法则：$y=\dfrac{1}{x}$；

④ $D=\{x|0\leqslant x<1\}$，$M=\{y|-1\leqslant y\leqslant 1\}$，对应法则：$y=\pm\sqrt{x}$．

其中函数和一一对应函数的个数分别为　　（　　）

A．1，1　　B．2，1　　C．3，2　　D．4，2

2．函数的表示法

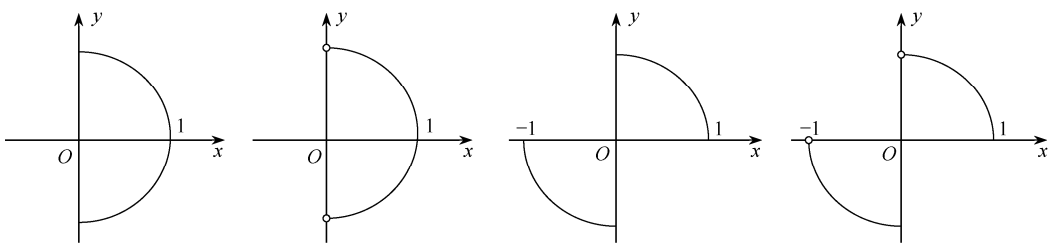
一般有列表法、图像法和解析法三种．

用表格的形式表示两个变量之间函数关系的方法，称为列表法．

用图像的形式表示两个变量之间函数关系的方法，称为图像法．

用解析式的形式表示两个变量之间函数关系的方法，称为解析法．

★下列图像中能作为某个函数的图像的是　　（　　）



A　　B　　C　　D

3．函数的定义域和值域

（1）函数的自然定义域和限定定义域．

函数的自然定义域：使函数的表达式有意义的自变量的取值集合叫做函数的自然定义域；

函数的限定定义域：由特殊限制规定的自变量的取值集合叫做函数的限定定义域．

函数的定义域是自然定义域和限定定义域的交集．

求函数的自然定义域，就是使函数的解析式达到如下要求：

① 分式的分母不为 0；

② 偶次根式的被开方数不能小于 0；幂运算中，当指数为 0 时，底数不能为 0；

③ 指数函数式中，底数大于 0 且不等于 1；

④ 对数函数式中，底数大于 0 且不等于 1，真数大于 0；

⑤ 如果函数由几个式子构成，那么函数的定义域就是使各部分式子都有意义的集合的交集．

（2）函数的值域：在函数 $y=f(x)$ 中，与自变量 x 对应的 y 值叫做函数值．函数值的集合叫做函数的值域．

★已知 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,1)$，则函数 $f(x+2)$ 的定义域为_____；函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的值域为_____．

4．分段函数的概念

若在函数的定义域中，对于自变量的不同取值范围，用含有 x 的不同式子或常数来表示对应法则，则这种函数叫做分段函数．如

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+3 & 0<x\leqslant 3\\ \dfrac{1}{x+1} & x>3\end{cases}$$

★已知函数 $f(x)=|2x+1|$，把 $f(x)$ 写成分段函数的形式为_____．

5．函数解析式的定义

如果一个函数能用一个或多个数学式子表示出来，那么这些数学式子叫做这个函数的解析式．如

① 一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）；

② 二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）；

③ 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq 0$）．

★圆的面积 S 与圆的半径 r 的函数关系表达式为_____．

6．求函数的解析式大致有三类题型

（1）已知函数是模型函数（如一次函数，二次函数等），求函数的解析式一般用待定系数法；

★已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f(f(x))=x+2$，则函数 $f(x)$ 的表达式为_____．

（2）已知函数 $y=f(x)$ 的变形形式，求函数的解析式一般用配凑法或换元法；

★已知 $f(x+1)=x-1$，则 $f(x)=$_____．

（3）应用题．解答应用题的一般步骤是：阅读理解材料；建立函数关系；讨论函数性质；给出问题结论．

★350ml 的可乐每听 3 元，假设购买 x 听所花的钱为 y 元，根据题意，用解析式将 y 表示为 x 的函数为_____．

【方法导引】

【例 4-1-1】 下列函数：（1）$f(x)=x$；（2）$f(x)=(\sqrt{x})^2$；（3）$f(x)=\sqrt{x^2}$；（4）$y=|x|$．其中是相同的两个函数为（　　）

A.（1）和（2）　B.（2）和（3）　C.（3）和（4）　D.（1）和（4）

【解】∵ $y=\sqrt{x^2}=|x|$，故（3）和（4）相同，故选 C.

另外（1）中 $f(x)=x$ 的定义域为 **R**，而（2）中 $f(x)=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为非负数集.

【例 4-1-2】 已知 $f(x)$ 是二次函数，且 $f(0)=0$，$f(x+1)=f(x)+x+1$，求 $f(x)$.

【解】设 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）

由 $f(0)=0$，得 $c=0$，∴ $f(x)=ax^2+bx$

又由 $f(x+1)=f(x)+x+1$，得 $a(x+1)^2+b(x+1)=ax^2+bx+x+1$

即 $ax^2+(2a+b)x+a+b=ax^2+(b+1)x+1$

$$\therefore \begin{cases}2a+b=b+1\\ a+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

∴ $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x$（$x\in\mathbf{R}$）.

【例 4-1-3】 求下列函数的定义域：

（1） $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-x-6}$；　（2） $f(x)=(x+2)^{\frac{1}{4}}+(x-3)^{-2}-(x+1)^0$.

【解】（1）由 $\begin{cases}x^2-4\geqslant 0\\ x^2-x-6\neq 0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x\leqslant -2\text{或}x\geqslant 2\\ x\neq 3\text{且}x\neq -2\end{cases}$，

所以所求函数的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$.

（2）由 $\begin{cases}x+2\geqslant 0\\ x-3\neq 0\\ x+1\neq 0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x\geqslant -2\\ x\neq 3\\ x\neq -1\end{cases}$

∴ $-2\leqslant x<-1$或$-1<x<3$或$x>3$

所以所求函数的定义域为 $[-2,-1)\cup(-1,3)\cup(3,+\infty)$.

【例 4-1-4】 求下列函数的值域：

（1） $f(x)=x^2-6x-11$；　（2） $f(x)=\sqrt{3x-2}$.

【解】（1）∵ $f(x)=(x-3)^2-20$，又∵ $(x-3)^2\geqslant 0$，

∴ $(x-3)^2-20\geqslant -20$，∴函数 $f(x)$ 的值域为 $[-20,+\infty)$；

（2） $f(x)=\sqrt{3x-2}$ 的定义域为 $[\dfrac{2}{3},+\infty)$，

当 $x\in[\dfrac{2}{3},+\infty)$ 时，$f(x)=\sqrt{3x-2}\geqslant 0$,

∴ $f(x)=\sqrt{3x-2}$ 的值域为 $[0,+\infty)$.

【实战演练】

一、达标检测

1．已知 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f\{f[f(2)]\}=$　（　　）

A．2　　B．$\frac{1}{2}$　　C．4　　D．8

2．下列各组中表示同一函数的是　　（　　）

A．$f(x)=(\sqrt{x})^2$，$g(x)=\sqrt{x^2}$　　B．$f(x)=x^2$，$g(x)=\frac{x^3}{x}$

C．$f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=|x|$　　D．$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}-1 & x>0\\ 1 & x<0\end{cases}$

3．函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{2-x}$ 的定义域是　　（　　）

A．(1，+∞)　　B．(−∞，2]　　C．[1，2]　　D．(1，2]

4．函数 $y=x^2-2x-3$，$x\in[-1,1]$ 的值域为　　（　　）

A．[−3，+∞)　　B．[−4，+∞)　　C．[−4，0]　　D．[−3，0]

5．已知函数 $f(x)=x^3+x+1$ 且 $f(a)=3$，则 $f(-a)=$_____.

6．已知 $f(x+1)=x^2-2x+2$，则 $f(x)=$_____.

7．已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求函数 $y=f(x^2)+f(x+\frac{4}{3})$ 的定义域.

8．若函数 $y=\frac{\sqrt[3]{x-5}}{kx^2+kx+2}$ 的定义域为 **R**，求 k 的取值范围.

二、直击高考

1．（2009 年单招试题）函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}x-2}$ 的定义域为_____.

2．（2011 年单招试题）设函数 $y=f(x)$，$x\in(0,+\infty)$，则它的图像与直线 $x=a$ 的交点个数为　　（　　）

A．0　　B．1　　C．0 或 1　　D．2

3．（2013 年单招试题）若函数 $f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，则 $f(f(x))=$ _____.

【提炼反思】

1．两个函数的定义域和对应法则都相同，它们就表示同一函数，对应法则相同是指对应法则等价，并非形式完全相同.

2．求函数的定义域一般有三类问题：一是给出解析式，应抓住使整个解析式有意义的自变量的集合；二是未给出解析式，就应抓住内函数的值域就是外函数的定义域；三是实际问题，此时函数的定义域除使解析式有意义外，还应使实际问题或几何问题有意义.

3．函数的解析式常用求法有：待定系数法、换元法（或凑配法）、解方程组法．使用换元法时，要注意研究定义域的变化．

4．在简单实际问题中建立函数式，首先要选定变量，然后寻找等量关系，求得函数的解析式，还要注意定义域．若函数在定义域的不同子集上的对应法则不同，可用分段函数来表示．

5．求函数值域的常用方法有图像法、配方法、判别式法、不等式法、反解法、换元法．

第2讲　函数的性质

【夯实基础】

1．函数的单调性

（1）单调性的定义：

对于给定区间$[a, b]$（$a<b$）上的函数$y=f(x)$，如果对于这个区间$[a, b]$上任意两个自变量的值x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$），那么就说函数$f(x)$在这个区间$[a, b]$上是增函数（减函数），这个区间$[a, b]$叫做$f(x)$的单调增（减）区间．

（2）判断函数单调性的基本步骤：

① 设元：设x_1、$x_2\in[a, b]$，且$x_1<x_2$，写出$f(x_1)$、$f(x_2)$；

② 作差：$f(x_1)-f(x_2)$；

③ 变形：将$f(x_1)-f(x_2)$变形至可以与0比较大小为止；

④ 判号：确定$f(x_1)-f(x_2)$为大于0、等于0或小于0三种情况之一；

⑤ 定论：根据①④得出结论．

（3）几种常见函数的单调性：

① 一次函数：$y=kx+b(k\neq 0)$

当$k>0$时，在$(-\infty, +\infty)$上是单调增函数；当$k<0$时，在$(-\infty, +\infty)$上是单调减函数．

② 二次函数：$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$．

（ⅰ）当$a<0$时，在区间$(-\infty, -\frac{b}{2a}]$上是增函数；在区间$[-\frac{b}{2a}, +\infty)$上是减函数；

（ⅱ）当$a>0$时，在区间$(-\infty, -\frac{b}{2a}]$上是减函数；在区间$[-\frac{b}{2a}, +\infty)$上是增函数．

③ 反比例函数$y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$：

（ⅰ）当$k>0$时，在区间$(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$上都是减函数；

（ⅱ）当$k<0$时，在区间$(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$上都是增函数．

★下列函数中，在定义域上为增函数的是（　　）

A．$f(x)=-x+5$　　B．$f(x)=\frac{1}{x}$

C．$f(x)=x^2+x+1$　　D．$f(x)=x^3$

2．函数的奇偶性

（1）奇函数：若函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

奇函数的图像关于原点呈中心对称；反之，图像关于原点呈中心对称的函数一定是奇函数.

（2）偶函数：若函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称；反之，图像关于 y 轴对称的函数一定是偶函数.

（3）判断函数奇偶性的步骤：

① 判断定义域是否关于原点对称，定义域不关于原点对称，则为非奇非偶的函数，定义域关于原点对称，则进行下一步的操作.

② 判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系，若 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)+f(x)=0$，则为奇函数；

若 $f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)-f(x)=0$，则为偶函数；

若 $f(-x)=-f(x)=f(x)$，则为既是奇函数又是偶函数，如 $f(x)=0$.

（4）常见函数的奇偶性：

① 一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）是奇函数的充要条件是 $b=0$；

② 二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）是偶函数的充要条件是 $b=0$；

③ 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq 0$）在定义域上是奇函数；

④ 正弦函数 $y=\sin x$、正切函数 $y=\tan x$ 在定义域上是奇函数，余弦函数 $y=\cos x$ 在定义域上是偶函数.

★设 $f(x)$ 是定义在（$-\infty$，$+\infty$）内的奇函数，且是减函数．若 $a+b>0$，则　　（　　）

A．$f(a)>f(b)$　　B．$f(a)<f(b)$

C．$f(a)+f(b)>0$　　D．$f(a)+f(b)<0$

【方法引导】

【例 4-2-1】　求下列函数的单调区间：

（1）$f(x)=-2x^2+8x-7$；　　（2）$y=\log_2(x^2-2x-8)$.

【解】（1）原函数化为 $f(x)=-2(x-2)^2+1$；

根据函数的图像，可知函数在（$-\infty$，2] 上是增函数，函数在[2，$+\infty$）上是减函数；

（2）由 $x^2-2x-8>0$ 得出函数的定义域为（$-\infty$，-2）$\cup$（4，$+\infty$），令 $v(x)=x^2-2x-8$，则 $y=\log_2 v$，因为 $y=\log_2 v$ 为增函数，在（$-\infty$，-2）上 $v(x)$ 大于 0 且是减函数，故原函数在（$-\infty$，-2）上是减函数，同理可知原函数在（4，$+\infty$）上是增函数.

【例 4-2-2】　已知函数 $y=f(x)$ 在 **R** 上是减函数，其中 $f(2a+3)<f(b+1)$，求 a 与 b 满足的关系式.

【解】由单调减函数的定义知：$2a+3>b+1$，得出 $2a-b>-2$.

【例 4-2-3】　已知偶函数 $f(x)$ 在（0，$+\infty$）上是增函数，对任意实数 a，试判断 $f(a^2+3)$ 与 $f(-3)$ 的大小关系.

【解】∵ $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-3)=f(3)$，因为 $f(x)$ 在（0，$+\infty$）上是增函数，且 $a^2+3\geqslant 3$，故 $f(-3)=f(3)\leqslant f(a^2+3)$.

【例 4-2-4】 定义在[−1，1]上的函数 $y=f(x)$ 是减函数且是奇函数，若 $f(a^2-a-1)+f(4a-5)>0$，求实数 a 的取值范围.

【解】∵ $f(a^2-a-1)+f(4a-5)>0$

∴ $f(a^2-a-1)>-f(4a-5)$

∵函数是奇函数

∴ $f(a^2-a-1)>f(5-4a)$

∵函数 $y=f(x)$ 是定义在[−1，1]上的减函数

$$\therefore \begin{cases} -1\leqslant a^2-a-1\leqslant 1 \\ -1\leqslant 5-4a\leqslant 1 \\ a^2-a-1<5-4a \end{cases}$$ 解得 $-1\leqslant a<\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$.

实数 a 的取值范围是 $a\in[-1,\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2})$.

【实战演练】

一、达标检测

1．函数 $f(x)=x^2+bx+c$，$x\in[0,+\infty)$ 是单调函数的充要条件是 （　　）

A．$b\geqslant 0$　　B．$b\leqslant 0$　　C．$b>0$　　D．$b<0$

2．函数 $y=x^2-2x-3$ 的单调递增区间是 （　　）

A．[1，$+\infty$）　　B．（$-\infty$，1]　　C．[0，1]　　D．[−1，$+\infty$）

3．已知函数 $f(x)=(a^2-1)x^2+(a+1)x$ 是奇函数，则 $a=$ （　　）

A．-1　　B．1　　C．± 1　　D．0

4．如果奇函数 $f(x)$ 在区间[3，7]上是增函数，且最小值为 5，那么 $f(x)$ 在区间[−7，−3]上是 （　　）

A．增函数且最小值为 -5　　B．增函数且最大值为 -5

C．减函数且最小值为 -5　　D．减函数且最大值为 -5

5．函数 $y=f(x)$ 是定义在 **R** 上的单调递增函数，且 $f(1-a)>f(a^2-1)$，则 a 的取值范围是_____.

6．已知奇函数 $f(x)$ 在（0，$+\infty$）上单调增加，且 $f(2)=0$，则 $f(x)<0$ 的解集为_____.

7．若函数 $f(x)=2x^2+4mx-3$，且 $x\in(-\infty,-1)$ 时是减函数，$x\in(-1,+\infty)$ 时是增函数，求 $f(2)$ 的值.

8．一次函数 $f(x)=(m^2-1)x+m^2-3m+2$，m 为常数.

（1）若 $f(x)$ 为减函数，且 $f(1)=0$，求 m 的值；

（2）若 $f(x)$ 为奇函数，求 m 的值.

二、直击高考

1.（2012 年单招试题）若偶函数 $y=f(x)$ 在（$-\infty$，-1]上是增函数，则下列关系式中成立的是（　　）

A. $f(-\frac{3}{2}) < f(-1) < f(2)$　　B. $f(-1) < f(-\frac{3}{2}) < f(2)$

C. $f(2) < f(-1) < f(-\frac{3}{2})$　　D. $f(2) < f(-\frac{3}{2}) < f(-1)$

2.（2010 年单招试题）已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，则 $f(6)=$_____.

3.（2013 年单招试题）设二次函数 $f(x)=ax^2+(b-2)x+2b-3a$ 是定义在[-6，$2a$]上的偶函数.

（1）求 a，b 的值；

（2）解不等式 $(\frac{1}{2})^{f(x)} > 2^{-2x}$；

（3）若函数 $g(x)=f(x)+mx+4$ 的最小值为 -4，求 m 的值.

【提炼反思】

1. 如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间是增函数或减函数，则函数在这一区间具有单调性，一个函数在不同的区间上可以有不同的单调性. 函数单调性反映在图像上表现为某一区间内图像的上升或下降.

2. 证明一个函数在区间 D 上是增（减）函数的方法通常是定义法，其过程是：作差——变形——判断符号，而最常用的变形是将和、差形式的结构变为积形式的结构.

3. 确定函数单调区间的常用方法有：（1）观察法；（2）图像法（即通过画出函数图像，观察图像，确定单调区间）；（3）定义法. 注意：单调区间一定要在定义域内.

4. 含有参数的函数的单调性问题，可分为两类：一类是由参数的范围判定其单调性；另一类是给定单调性求参数范围，其解法是由定义法得到恒成立的不等式，结合定义域求出参数的取值范围.

5. 奇偶性是某些函数具有的一种重要性质，对一个函数首先应判断它是否具有这种性

质．判断函数的奇偶性应首先检验函数的定义域是否关于原点对称，然后根据奇偶性的定义判断（或证明）函数是否具有奇偶性．如果要证明一个函数不具有奇偶性，可以在定义域内找到一对非零实数 a 与 $-a$，验证 $f(a)\pm f(-a)\neq 0$．

6．对于具有奇偶性的函数的性质的研究，我们可以重点研究 y 轴一侧的性质，再根据其对称性得到整个定义域上的性质．

第 3 讲　一次函数、反比例函数和二次函数

【夯实基础】

1．一次函数

（1）形如 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的函数叫做一次函数．

（2）一次函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$．

（3）$y=kx+b(k\neq 0)$ 中，b 为其图像与 y 轴交点的纵坐标，$k=\tan\alpha$（α 是直线的向上方向与 x 轴正方向的夹角）．

（4）一次函数的图像经过点 $(0,b)$ 和 $(1,k+b)$ 的一条直线．

（5）一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$，当 $k>0$ 时，y 随着 x 的增大而增大，是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数；当 $k<0$ 时，y 随着 x 的增大而减小，是 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数．

（6）一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$，当 $b=0$ 时，成为正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$．正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$ 的图像经过点 $(0,0)$ 和 $(1,k)$．正比例函数是奇函数，它的图像关于原点成中心对称．

★已知一次函数 $y=5x-1$ 的图像经过点 $(m,2)$，则 $m=$_____．

2．反比例函数

（1）形如 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的函数叫做反比例函数．

（2）反比例函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$．

（3）当 $k>0$ 时，反比例函数在区间 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 上都是单调减少；

当 $k<0$ 时，反比例函数在区间 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 上都是单调增加．

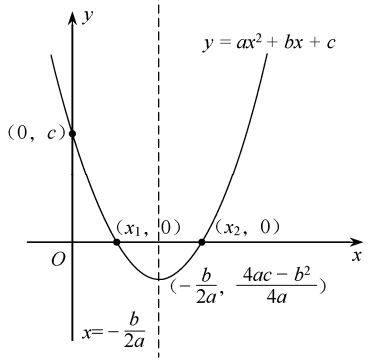
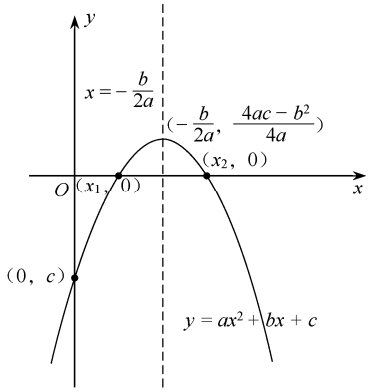
（4）反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 是奇函数，它的图像关于原点成中心对称．

★反比例函数 $y=-\dfrac{3}{x}$ 的图像与直线 $y=-1$ 的交点的坐标是_____．

3．二次函数

（1）定义：形如 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的函数叫做二次函数．

（2）二次函数的图像和性质：

$y=ax^2+bx+c$		$a>0$	$a<0$
图　像			
定义域		$(-\infty, +\infty)$	
值　域		$[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty)$	$(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$
图像特征	开口方向	开口向上	开口向下
	顶点坐标	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$	
	对称轴	$x=-\frac{b}{2a}$	
性　质	单调性	在$(-\infty, -\frac{b}{2a}]$上单调减， 在$[-\frac{b}{2a}, +\infty)$上单调增	在$(-\infty, -\frac{b}{2a}]$上单调增， 在$[-\frac{b}{2a}, +\infty)$上单调减
	奇偶性	当$b=0$时，二次函数为$y=ax^2+c$，它是偶函数，其图像关于y轴对称，当$b\neq 0$时，二次函数没有奇偶性	
	周期性	无周期性	

★如图 4-3-1 所示，直线 $x=1$ 是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像的对称轴，则　　(　　)

A．$a+b+c>0$　　B．$b>a+c$

C．$c>2b$　　D．$abc<0$

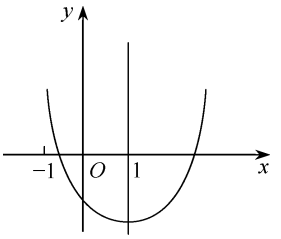


图 4-3-1

（3）二次函数解析式的三种形式：

①一般式：$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，任何一个二次函数的解析式都可以化成一般式，其中 a 确定函数图像的开口方向，c 为图像与 y 轴交点的纵坐标，图像的对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标为$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$.

★已知二次函数的图像过点$(-1, -22)$，$(0, -8)$，$(2, 8)$，此二次函数的表达式是_____.

②顶点式：$y=a(x-h)^2+k$（$a\neq 0$）．任何一个二次函数的解析式都可以化成顶点式，这

时图像的对称轴为 $x=h$，顶点坐标为（h，k）．其中 $h=-\dfrac{b}{2a}$，$k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$．

★二次函数 $y=2(x+1)^2-3$ 的对称轴方程是_____，顶点坐标是_____．

③两点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$（$a\neq 0$）．当二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的图像与 x 轴有两个交点时，二次函数的解析式可化为两点式，其中 x_1、x_2 为二次函数的图像与 x 轴交点的横坐标，这时图像的对称轴为 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$．

★二次函数 $y=6(x-2)(x+5)$ 与 x 轴的交点的坐标是_____．

【方法导引】

【例 4-3-1】 已知一次函数的图像经过点(1, 3)且与 $y=x-4$ 的交点的纵坐标为 -1．

（1）求函数的解析式；（2）求该函数图像与 x 轴的交点．

【解】（1）设一次函数的解析式为 $y=kx+b$

当 $y=-1$ 时，由 $y=x-4$，得 $x=3$，

∴一次函数的图像过点(3，-1)，又∵一次函数的图像经过点(1，3)

$$\therefore \begin{cases} 3=k+b \\ -1=3k+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-2 \\ b=5 \end{cases}$$

∴所求的一次函数的解析式为 $y=-2x+5$．

（2）令 $y=0$，得 $x=\dfrac{5}{2}$，

∴该函数图像与 x 轴上的交点为$(\dfrac{5}{2},\ 0)$．

【例 4-3-2】 已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图像与 $y=-\dfrac{3}{2}x+1$ 的交点横坐标为 -2．

（1）求反比例函数的解析式；

（2）求反比例函数图像与直线 $y=-x-2$ 的交点．

【解】（1）当 $x=-2$ 时，$y=-\dfrac{3}{2}x+1=-\dfrac{3}{2}\times(-2)+1=4$，

∴反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图像经过点（-2，4），

∴ $4=\dfrac{k}{-2}\Rightarrow k=-8$，∴反比例函数的解析式为 $y=-\dfrac{8}{x}$．

（2）由 $\begin{cases} y=-x-2 \\ y=-\dfrac{8}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$

∴交点坐标为（-4，2）或(2，-4)．

【例 4-3-3】 求下列二次函数图像的顶点、对称轴，说出图像的开口方向和函数的单调性．

（1） $y=x^2-4x+1$；　　（2） $y=-2x^2-2x+5$．

【解】（1） $y=x^2-4x+1=(x^2-4x+4)-3=(x-2)^2-3$，

∴函数的顶点坐标为(2，−3)，对称轴方程为 $x=2$，图像的开口向上，

函数在区间(−∞，2]上是单调减函数，在区间[2，+∞)上是单调增函数.

（2）$y=-2x^2-2x+5=-2(x^2+x+\frac{1}{4})+5+\frac{1}{2}=-2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{2}$，

∴函数的顶点坐标为（$-\frac{1}{2},\frac{11}{2}$），对称轴方程为 $x=-\frac{1}{2}$，图像的开口向下.

函数在区间$(-\infty,-\frac{1}{2}]$上是单调增函数，在区间$[-\frac{1}{2},+\infty)$上是单调减函数.

【例 4-3-4】　已知二次函数的图像经过三点(1，−3)，(−2，0) 和（$-\frac{1}{2}$，0)，求二次函数的解析式.

【解】设二次函数解析式为 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$），则

$$\begin{cases}-3=a+b+c\\0=4a-2b+c\\0=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\end{cases}\text{ 解之，得}\begin{cases}a=-2\\b=-3\\c=2\end{cases}$$

所以，二次函数的解析式为　$y=-2x^2-3x+2$.

注：本题也可以利用二次函数的顶点式或两点式求解.

【实战演练】

一、达标检测

1．下列函数中是奇函数的是　（　　）

A．$y=x+1$　　B．$y=-x+1$　　C．$y=x$　　D．$y=x-1$

2．下列函数中，在（0，+∞）上单调增的是　（　　）

A．$y=-x+1$　　B．$y=-\frac{1}{x}$　　C．$y=x^2-4x+1$　　D．$y=-x^2$

3．函数 $y=x^2+4x+3$ 的顶点坐标是　（　　）

A．（2，−1）　　B．（−2，−1）　　C．（2，1）　　D．（−2，1）

4．如果一个二次函数图像与 $y=x^2-4x$ 的图像关于 y 轴对称，则这个二次函数的解析式是　（　　）

A．$y=-x^2+4x$　　B．$y=x^2-4x$　　C．$y=-x^2-4x$　　D．$y=x^2+4x$

5．已知一次函数的图像经过点(3，−1)，且与 x 轴的交点的横坐标为 2，则该函数的解析式为_____.

6．函数 $y=-2x^2-8x+1$ 的定义域是_____，值域是_____，对称轴方程是_____，顶点坐标为_____．当_____时，y 随着 x 的增大而增大；当_____时，y 随着 x 的增大而减小.

7．已知二次函数 $y=x^2-4x+h$ 的顶点在直线 $y=2x-1$ 上，求 h 的值.

8．已知函数 $f(x)=kx^2+(k^2-5)x-1$ 在区间 $[-2，+\infty)$ 上是减函数，求实数 k 的取值范围．

二、直击高考

1．（2014 年单招试题）设二次函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+m$ 图像的顶点为 C，与 x 轴的交点分别为 A，B．若△ ABC 的面积为 $8\sqrt{2}$．

（1）求 m 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 在区间 $[-1，2]$ 上的最大值和最小值．

2．（2011 年单招试题）已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像经过坐标原点，满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且方程 $f(x)=x$ 有两个相等的实根．

（1）求该二次函数的解析式；

（2）求上述二次函数在区间 $[-1，2]$ 上的最大值和最小值．

3．（2010 年单招试题）已知函数 $f(x)=x^2-(a^2-2a-1)x-a-2$ 在 $[1，+\infty)$ 上是增函数．

（1）求实数 a 的取值范围；

（2）试比较 $f(1)$ 与 $2f(0)$ 的大小．

【提炼反思】

1．有关一次函数的问题，可以先设出一般形式，再利用一次函数的图像和性质解决问题．

2．反比例函数的相关问题，在理解了其图像和性质的基础上就能够事半功倍．

3．二次函数问题是历年单招考试中的重要内容，学习二次函数，可以从两个方面入手：一

是解析式，二是图像特征．从解析式出发，可以进行纯粹的代数推理，这种代数推理、论证的能力反映出一个人的基本数学素养；从图像特征出发，可以实现数与形的自然结合，这正是中学数学中一种非常重要的思想方法．由于二次函数的解析式简捷明了，易于变形（一般式、顶点式、两点式等），所以，在解决二次函数的问题时，常常借助其解析式，通过纯代数推理，进而导出二次函数的有关性质．我们通常从两个方面研究涉及二次函数的一些综合问题．

（1）二次函数的一般式 $y=ax^2+bx+c$（$c\neq 0$）中有三个参数 a，b，c．解题的关键在于：通过三个独立条件“确定”这三个参数．

（2）数形结合：二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的图像为抛物线，具有许多特殊的性质，如对称性、单调性等．结合这些图像特征解决有关二次函数的问题，可以化难为易，形象直观．因为二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）在区间$(-\infty,-\dfrac{b}{2a}]$和区间$[-\dfrac{b}{2a},+\infty)$上分别单调，所以函数 $f(x)$ 在闭区间上的最大值、最小值必在区间端点或顶点处取得．

第 4 讲　幂、指数、对数运算

【夯实基础】

1．实数指数幂的有关概念

（1）正数 a 的正 n 次方根的叫做 a 的 n 次算术根，$\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，n 为根指数，a 为被开方数；a^n（$n\in\mathbf{N}^*$）为 a 的 n 次幂，a 为幂的底数，n 为幂的指数．

（2）正整数指数幂：$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a}$（$n\in\mathbf{N}^*$）；

零指数幂：$a^0=1$（$a\neq 0$）；

负整数指数幂：$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$（$a\neq 0$，$p\in\mathbf{N}^*$）；

分数指数幂：正分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$（$a>0$，$m$、$n\in\mathbf{N}^*$，$n>1$），负分数指数幂 $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$（$a>0$，$m$、$n\in\mathbf{N}^*$，$n>1$）．

★分数指数幂 $a^{-\frac{3}{5}}$（$a\neq 0$）写成根式的形式为_____，根式 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{b^5}}$（$b\neq 0$）写成实数指数幂的形式为_____．

（3）n 次方根具有的性质：

①$(\sqrt[n]{a})^n=a$（$n\in\mathbf{N}^*$，且$n>1$）；

②当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}$

★$\sqrt[4]{(-3)^4}=$_____．

2．实数指数幂的运算法则

（1）$a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$；

（2）$\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}$；

（3）$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$；

（4）$(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$；

（5）$(\dfrac{a}{b})^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$.

★化简计算：

（1）$a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{8}{3}}\cdot a^{6}\cdot a^{-3}$（$a\neq 0$）=_____；

（2）$a\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$=_____；

（3）$\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a^{3}}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a^{5}}\cdot\sqrt[12]{a}}$=_____；

（4）$(-64)^{\frac{2}{3}}-(-\dfrac{1}{3})^{-2}+(\sqrt{3}-1)^{0}+2^{-3}\times 4^{5}\times 0.25^{2}$=_____.

3．对数的概念

（1）对数的定义：如果$a^{b}=N$（$a>0$且$a\neq 1$），那么数b叫做以a为底N的对数，记作：$\log_{a}N=b$，如$\log_{2}4=2$．其中a叫做对数的底数，简称为底；N叫做真数.

（2）零和负数没有对数.

（3）两个基本对数：$\log_{a}1=0$（$a>0$且$a\neq 1$）；$\log_{a}a=1$（$a>0$且$a\neq 1$）.

它们表示：1的对数等于0；底数的对数等于1.

（4）两个基本对数恒等式：$a^{\log_{a}x}=x$（$a>0$且$a\neq 1$，$x>0$）；

$\log_{a}a^{x}=x$（$a>0$且$a\neq 1$，$x\in\mathbf{R}$）.

（5）常用对数：以10为底的N的对数$\log_{10}N$叫做N的常用对数，简记为$\lg N$；

自然对数：以e为底的N的对数$\log_{e}N$叫做N的自然对数，简记为$\ln N$.

其中$e=2.7182818285\cdots$是一个无理数.

★将$2^{4}=16$改写成对数形式为_____；若$e^{2}=N$，则$\ln N$=_____；$4^{\log_{2}3}$=_____.

4．积、商、幂的对数运算法则

$\log_{a}(M\cdot N)=\log_{a}M+\log_{a}N$（$a$、$M$、$N>0$，$a\neq 1$）；

$\log_{a}\dfrac{M}{N}=\log_{a}M-\log_{a}N$（$a$、$M$、$N>0$，$a\neq 1$）；

$\log_{a}M^{b}=b\log_{a}M$（a、$M>0$，$a\neq 1$，$b\in\mathbf{R}$）.

它们表述为：积的对数等于对数的和；商的对数等于对数的差；幂的对数等于指数与底的对数之积.

★（1）计算：$2\lg 2+\lg 25$=_____；$\dfrac{\log_{3}8}{\log_{3}2}$=_____；

（2）若$\log_{20}4=a$，则$\log_{20}5$=_____；若$\log_{a}2=m$，$\log_{a}3=n$，则a^{2m+n}=_____.

5．对数的换底公式和倒数公式

（1）换底公式：$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（$a$、$b$、$c>0$，$a\neq 1$，$c\neq 1$）；

（2）对数的倒数公式：$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$（$a$、$b>0$，$a\neq 1$，$b\neq 1$）.

★已知$\log_5 2=a$，则$\log_2 25=$_____.

6．几个常用结论

（1）$\log_{a^n} b^n=\log_a b$；（2）$\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$；（3）$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$.

★已知$\log_3 2\cdot\log_2 9\cdot\log_2 4=\log_2 m$，则$m=$_____.

【方法导引】

【例 4-4-1】 计算下列各式的值：

（1）$[(\dfrac{4}{3})^{\frac{1}{3}}]^{-3}-(-3)^0$；（2）$\sqrt{a\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}$；（3）若$2^x=3$，$2^y=5$，求$2^{2x+y}$的值.

【解】（1）原式$=(\dfrac{4}{3})^{\frac{1}{3}\times(-3)}-1=-\dfrac{1}{4}$；

（2）原式$=(a\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a})^{\frac{1}{2}}=(a\cdot a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=a$；

（3）$2^{2x+y}=(2^x)^2\cdot 2^y=3^2\times 5=45$.

【例 4-4-2】 计算：

（1）$2(\lg\sqrt{2})^2+\lg\sqrt{2}\cdot\lg 5+\sqrt{(\lg\sqrt{2})^2-\lg 2+1}$；

（2）$\dfrac{\lg\sqrt{27}+\lg 8-\lg\sqrt{1000}}{\lg 1.2}$；

（3）$\log_4 25-2\log_4 10+\log_2 9\cdot\log_3\sqrt{5}\cdot\log_5 2$.

【解】（1）原式$=\lg\sqrt{2}(2\lg\sqrt{2}+\lg 5)+\sqrt{(\lg\sqrt{2}-1)^2}=\lg\sqrt{2}(\lg 2+\lg 5)+1-\lg\sqrt{2}=1$；

（2）原式$=\dfrac{\frac{3}{2}\lg 3+3\lg 2-\frac{3}{2}}{\lg 3+2\lg 2-1}=\dfrac{\frac{3}{2}(\lg 3+2\lg 2-1)}{\lg 3+2\lg 2-1}=\dfrac{3}{2}$；

（3）原式$=\log_4\dfrac{25}{100}+2\log_2 3\cdot\dfrac{1}{2}\log_3 5\cdot\log_5 2=\log_4\dfrac{1}{4}+2\times\dfrac{1}{2}\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 2$

$=-1+1=0$.

【例 4-4-3】 已知$\log_2 3=a$，$3^b=7$，用a、b表示$\log_{12}56$.

【解】∵ $3^b=7$，∴ $b=\log_3 7=\dfrac{\log_2 7}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2 7}{a}$，∴ $ab=\log_2 7$

∴ $\log_{12}56=\dfrac{\log_2 56}{\log_2 12}=\dfrac{\log_2(7\times 8)}{\log_2(3\times 4)}=\dfrac{\log_2 7+\log_2 8}{\log_2 3+\log_2 4}=\dfrac{ab+3}{a+2}$.

【例 4-4-4】 设$\log_2 a$，$\log_2 b$是方程$x^2+3x+2=0$的两根，求ab的值.

【解】由题意得，$\log_2 a+\log_2 b=-3$，则$\log_2(ab)=-3$，故$ab=2^{-3}=\dfrac{1}{8}$.

【实战演练】

一、达标检测

1．若 $9^{-x}=\frac{1}{3}$，则 $x=$ （　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．2　　D．1

2．把对数式 $b=\log_a N$ 写成指数式是 （　　）

A．$b^a=N$　　B．$b^N=a$　　C．$a^b=N$　　D．$a^N=b$

3．计算 $\log_{27}4\cdot\log_8 9=$ （　　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．1　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{4}{9}$

4．设 $a=\log_3 2$，则 $\log_3 8-2\log_3 6$ 等于 （　　）

A．$a-2$　　B．$3a-(1+a)^2$　　C．$5a-2$　　D．$3a-a^2-1$

5．填空：

（1）$0.001^{-\frac{1}{3}}=$_____；（2）$(-2)^{\frac{1}{3}}\cdot(-2)^{\frac{2}{3}}=$_____；

（3）$(-27)^{\frac{2}{3}}\times 27^{\frac{4}{3}}=$_____；（4）$(9a^2)^{\frac{1}{2}}=$_____（$a<0$）.

6．用 $\log_a x$，$\log_b y$，$\log_c z$ 表示 $\log_a\frac{x^5\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$ 为_____.

7．化简：

（1）$\frac{1}{\sqrt[3]{(\frac{8}{27})^{-1}}}$；　　（2）$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}$（$x<2$）.

8．计算：$\frac{2\log_5 2+\log_5 3}{1+\frac{1}{2}\log_5 0.36+\frac{1}{3}\log_5 64}$.

二、直击高考

1．（2006 年单招试题）三个数 0.6^2，$2^{0.6}$，$\log_2 0.6$ 的大小关系是 （　　）

A．$0.6^2<2^{0.6}<\log_2 0.6$　　B．$\log_2 0.6<0.6^2<2^{0.6}$

C．$\log_2 0.6<2^{0.6}<0.6^2$　　D．$0.6^2<\log_2 0.6<2^{0.6}$

2．（2011 年单招试题）$\log_4 3-\log_4 12+\log_8 4=$ （　　）

A．$-\frac{1}{3}$　　B．1　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{5}{3}$

3．（2013 年单招试题）若 a，b 是方程 $x^2-30x+100=0$ 的两个实根，则 $\lg a+\lg b=$ _____.

【提炼反思】

1．$\sqrt[b]{N}=a$，$a^b=N$，$\log_a N=b$（$a>0$且$a\neq 1$，$N>0$）是同一数量关系的三种不同表示形式，因此在许多问题中需要熟练进行它们之间的相互转化，选择最好的形式进行运算．在运算中，根式常常化为指数式比较方便，而对数式一般应化为同底．

2．在进行对数运算时，通常是先利用换底公式或倒数公式将对数化为同底，再利用对数的运算法则进行化简或计算．

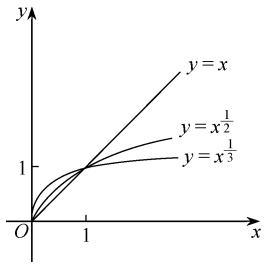
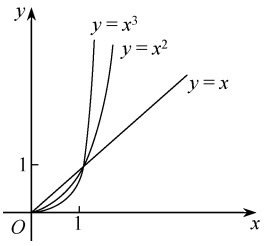
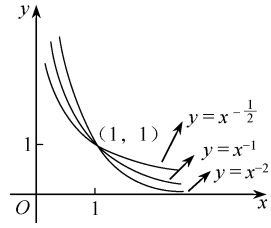
第 5 讲　幂、指数、对数函数

【夯实基础】

1．幂函数的图像和性质

幂函数定义：一般的，形如 $y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$，$\alpha\neq 0$）的函数称为幂函数，其中 α 为常数．通常我们只研究幂函数在第一象限的图像和性质，其他象限利用奇偶性研究．

幂函数在第一象限的图像和性质：

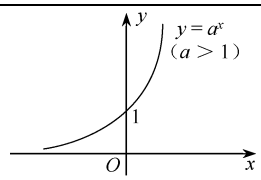
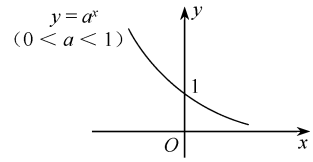
<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">$\alpha>0$</td><td rowspan="2">$\alpha<0$</td></tr>
<tr><td>$0<\alpha<1$</td><td>$\alpha>1$</td></tr>
<tr><td>图　像</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td colspan="2">在区间$(0,+\infty)$上单调增</td><td>在区间$(0,+\infty)$上单调减</td></tr>
<tr><td>定　点</td><td colspan="2">过定点（0，0）和（1，1）</td><td>过定点（1，1）</td></tr>
<tr><td rowspan="2">图　像
特　征</td><td>$0<\alpha<1$</td><td>$\alpha>1$</td><td rowspan="2">在第一象限内，当 x 从右边趋向于原点时，图像在 y 轴右方无限地逼近 y 轴，当 x 趋于 $+\infty$ 时，图像在 x 轴上方无限地逼近 x 轴</td></tr>
<tr><td>当 $0<x<1$ 时，图像在 $y=x$ 的上方；当 $x>1$ 时，图像在 $y=x$ 的下方</td><td>当 $0<x<1$ 时，图像在 $y=x$ 的下方；当 $x>1$ 时，图像在 $y=x$ 的上方</td></tr>
</table>

★已知函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{-5m-3}$，当 m 为何值时，$f(x)$ 是：

（1）幂函数？（2）在$(0,+\infty)$上单调递减的幂函数？

2．指数函数的图像和性质

指数函数定义：一般地，形如 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$）的函数叫做指数函数．

	$a>1$	$0<a<1$
图　像		
定义域/值域	定义域：**R**，值域：$(0,+\infty)$	
单调性	在 **R** 上单调增	在 **R** 上单调减
定　点	过定点$(0,1)$	过定点$(0,1)$
函数值和图像特征	（1）当 $x<0$ 时，$0<y<1$；当 $x>0$ 时，$y>1$； （2）图像位于 x 轴上方；向左无限接近 x 轴	（1）当 $x<0$ 时，$y>1$；当 $x>0$ 时，$0<y<1$； （2）图像位于 x 轴上方；向右无限接近 x 轴
指数函数 $y=a^x$ 与 $y=(\frac{1}{a})^x$ 的图像关于 y 轴对称		

★函数① $y=a^x$；② $y=b^x$；③ $y=c^x$；④ $y=d^x$ 的图像如图 4-5-1 所示，则 a，b，c，d 的大小关系是　　（　　）

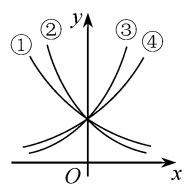


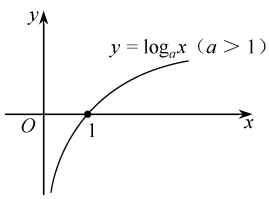
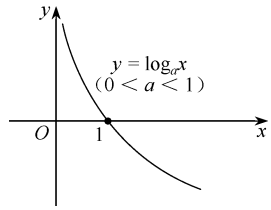
图 4-5-1

A．$a<b<1<c<d$　　B．$b<a<1<d<c$

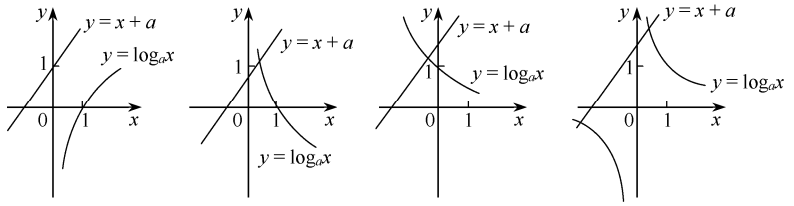
C．$1<a<b<c<d$　　D．$a<b<1<d<c$

3．对数函数的图像和性质

对数函数定义：一般地，形如 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）的函数叫做对数函数．

	$a>1$	$0<a<1$
图　像		
定义域/值域	定义域：$(0,+\infty)$，值域：**R**	
单调性	在$(0,+\infty)$上单调增	在$(0,+\infty)$上单调减
定　点	过定点（1，0）	过定点（1，0）
值和图像的分布	（1）当 $0<x<1$ 时，$y<0$；当 $x>1$ 时，$y>0$； （2）图像位于 y 轴右侧；向下无限接近 y 轴	（1）当 $0<x<1$ 时，$y>0$；当 $x>1$ 时，$y<0$； （2）图像位于 y 轴右侧；向上无限接近 y 轴
对数函数 $y=\log_a x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图像关于 x 轴对称		

★下列函数图像正确的是　　（　　）



A　　B　　C　　D

★函数 $y=\log_a x$，$y=\log_b x$，$y=\log_c x$，$y=\log_d x$ 的图像如图 4-5-2 的①，②，③，④所示，则 a，b，c，d 的大小关系是　　（　　）

A．$1<d<c<a<b$　　B．$c<d<1<a<b$

C．$c<d<1<b<a$　　D．$d<c<1<a<b$

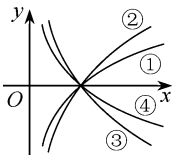


图 4-5-2

4．指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 的关系

①互为反函数：② $y=a^x$ 的定义域是 $y=\log_a x$ 的值域，$y=a^x$ 的值域是 $y=\log_a x$ 的定义域；反之也成立；③图像关于直线 $y=x$ 对称．

★函数 $y=(\frac{1}{3})^x$ 的图像关于 $y=x$ 对称的曲线的函数解析式是　　（　　）

A．$y=3^x$　　B．$y=\log x$

C．$y=-(\frac{1}{3})^x$　　D．$y=-\log_3 x$

【方法导引】

【例 4-5-1】 求下列函数的定义域：

（1）$y=(\frac{1}{3})^{\sqrt{1-x^2}}$；（2）$y=\log_{(2x-1)}(3x-2)$；（3）$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x^2)}$．

【解】（1）要使表达式有意义，偶次根式的被开方数要大于或等于 0，则 $1-x^2\geqslant 0$ 即可，$-1\leqslant x\leqslant 1$，所以此函数的定义域为 $[-1,1]$；

（2）要使表达式有意义，对数的底数要大于 0 且不等于 1，且真数大于 0，故 $\begin{cases}2x-1>0\\2x-1\neq 1\\3x-2>0\end{cases}$，

即 $x>\frac{2}{3}$ 且 $x\neq 1$，所以此函数的定义域为 $(\frac{2}{3},1)\cup(1,+\infty)$；

（3）要使表达式有意义，偶次根式的被开方数要大于或等于 0，且真数要大于 0，故 $\begin{cases}2-x^2>0\\\log_{\frac{1}{2}}(2-x^2)\geqslant 0\end{cases}$，所以此函数的定义域为 $(-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2})$．

【例 4-5-2】 （1）函数 $y=\log_2 x$ 的定义域是 $[1,64)$，则值域是_____；

（2）当 $x\in[-1,1]$ 时，$y=3^x-2$ 的值域是_____；

（3）函数 $y=1+\log_2 x$（$x\geqslant 4$）的值域是_____；

（4）函数 $y=x^{-2}$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 3]$ 上的值域是_____.

【解】（1）因为 $2>1$，函数 $y=\log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调增，所以值域为 $[0, 6)$；

（2）函数 $y=3^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增，所以值域为 $[-\frac{5}{3}, 1]$；

（3）函数 $y=\log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增，所以值域为 $[3, +\infty)$；

（4）函数 $y=x^{-2}$ 在 $(0, +\infty)$ 单调减，所以值域为 $[\frac{1}{9}, 4]$.

【例 4-5-3】 将 $4^{0.5}$，$8^{0.48}$，$(\frac{1}{2})^{-1.6}$ 用“<”连接.

【解】 $4^{0.5}=[(2)^2]^{0.5}=2$；$8^{0.48}=(2^3)^{0.48}=2^{3\times 0.48}=2^{1.44}$；$(\frac{1}{2})^{-1.6}=2^{1.6}$；

又由于 $f(x)=2^x$ 在 **R** 上是增函数，所以 $4^{0.5}<8^{0.48}<(\frac{1}{2})^{-1.6}$.

【例 4-5-4】 若函数 $f(x)=\log_a x$（$0<a<1$）在区间 $[a, 2a]$ 上的最大值是最小值的 3 倍，则 a 等于 （　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

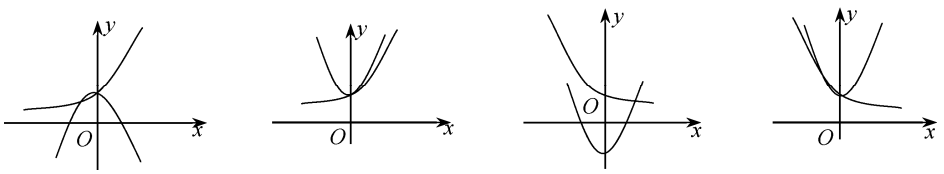
C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

【解】函数 $f(x)=\log_a x$（$0<a<1$）在 $(0, +\infty)$ 上单调减，所以此函数的最大值为 1，最小值为 $\log_a 2a$，由题意列出等式 $3\log_a 2a=1$，解出 a 即可．选 A.

【实战演练】

一、达标检测

1．函数 $y=a^x$ 和 $y=(a-1)x^2+1$ 在同一坐标系中的图像可能是 （　　）



A　　B　　C　　D

2．设 $a\in\{-1, 1, \frac{1}{2}, 3\}$，则使函数 $y=x^\alpha$ 的定义域为 **R** 且为奇函数的所有 a 值为 （　　）

A．1，3　　B．−1，1　　C．−1，3　　D．−1，1，3

3．若 $0<x<y<1$，则 （　　）

A．$3^y<3^x$　　B．$\log_x 3<\log_y 3$　　C．$\log_4 x<\log_4 y$　　D．$(\frac{1}{4})^x<(\frac{1}{4})^y$

4．若 $\log_m 9<\log_n 9<0$，那么 m，n 满足的条件是 （　　）

A．$m>n>1$　　B．$n>m>1$　　C．$0<n<m<1$　　D．$0<m<n<1$

5．比较下列各组中两个值大小：

（1）$0.6^{\frac{6}{11}}$ _____ $0.7^{\frac{6}{11}}$；　（2）$(-0.88)^{\frac{5}{3}}$ _____ $(-0.89)^{\frac{5}{3}}$.

6．幂函数 $y=f(x)$ 的图像经过点 $(-2,-\frac{1}{8})$，则满足 $f(x)=27$ 的 x 的值是_____.

7．方程 $x^{\frac{1}{2}}=\log_{\sin 1}x$ 的实根个数是_____.

8．解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x-5)<\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$.

二、直击高考

1．（2010 年单招试题）若曲线 $y=2^x+1$ 与直线 $y=b$ 没有公共点，则 b 的取值范围是_____.

2．（2012 年单招试题）若实数 x 满足 $x^2-6x+8\leqslant 0$，则 $\log_2 x$ 的取值范围是　（　　）

A．[1，2]　　B．（1，2）　　C．（$-\infty$，1]　　D．[2，$+\infty$）

3．（2011 年单招试题）求函数 $y=\sqrt{8-2^{x^2+2x}}$ 的定义域.

【提炼反思】

1．幂函数因幂指数不同而性质不同，图像也各异，关键是掌握第一象限的部分，求解幂函数的定义域和值域时要对 α 进行分类.

2．指数函数的单调性跟其底是否大于 1 有关.

3．对数函数和指数函数互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称，在学习其性质时应当类比，帮助理解.

第 6 讲　函数的实际应用

【夯实基础】

1．函数的实际应用，主要指用函数的有关知识解决一些实际问题．要求能对简单的实际问题判定和建立变量之间的函数关系．关键是“建模”：即题目只给出实际问题的背景或它的现实存在，不提出具体要求，还要探究怎样解决，即让解题者设计方案，这样的问题俗称“建模”.

★两镇 A 和 B 相距 100km，一天，某人驾车以 50km/h 的平均速度从 A 镇驶往 B 镇去参

加朋友的聚会，则他在出发 t 小时后，离 B 镇的路程 y（km）的函数解析式是_____.

2．解答函数应用题的一般步骤是：

（1）审题：理解题意，把握数学本质；

（2）建模：分析题中的数量关系，建立相应数学模型，把应用问题转化为数学问题；

（3）解模：用数学知识与方法解决转化了的数学问题；

（4）检验：回到应用问题，检验结果的实际意义，给出答案.

★一套书有 8 册，售价 240 元，设这套书各册价格相同，求售价 y（元）与这套书的册数 x 之间的函数关系式（写出定义域）_____.

3．把简单的实际问题归结到二次函数，并应用其性质进行求解.

★将进价为 80 元的商品 400 个，按 90 元一个售出时能全部卖出，已知这种商品每个涨价 1 元，其销售数就减少 20 个，为了获得最大利润，售价应定为每个商品_____元.

4．把简单的实际问题归结到指数函数，并应用其性质进行求解.

★某新产品成本价 a 元，由于不断进行技术革新，每年成本降低 10%，x 年后成本价为_____元.

5．与数列、均值定理等知识有关的综合应用的实际问题.

★某种汽车，购买时费用为 10 万元，每年应缴保险费、养路费及汽油费合计 9000 元，汽车的维修费平均第一年 2000 元，第二年 4000 元，第三年 6000 元，依等差数列逐年递增. 问这种汽车使用_____年报废最合算（即年平均费用最少）？

【方法导引】

【例 4-6-1】 一根长为 40cm 的铁丝围成一个矩形，面积最大是多少？

【解】设矩形的长为 xcm，则宽为 $(20-x)$ cm，由题意得

面积 $S=-x(20-x)=-(x-10)^2+100$

所以当 $x=10$cm 时，面积最大，最大为 100cm^2.

【例 4-6-2】 某医药研究所开发一种新药，如果成人按照规定的剂量服用，据监测，服用后每毫升血液中的含药量 y（微克）与时间 t（小时）近似满足如图 4-6-1 所示的曲线.（1）写出服药后 y（微克/毫升）与 t（小时）之间的函数关系式；（2）据测定，每毫升血液中的含药量不少于 4 毫克时治疗疾病有效，若某病人第一次服用此药，有效治疗时间有多少小时？

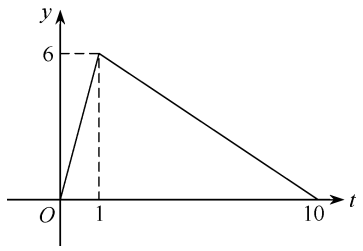


图 4-6-1

【解】（1）当 $0\leqslant t\leqslant 1$，时 $y=6t$，

当 $1<t\leqslant 10$ 时，$\dfrac{y-0}{6-0}=\dfrac{t-10}{1-10}$，

$\therefore y=-\dfrac{2}{3}(t-10)$，

∴服药后 y（微克/毫升）与 t（小时）之间的函数关系式为：

$$y=\begin{cases}6t & 0\leqslant t\leqslant 1\\ -\dfrac{2}{3}(t-10) & 1<t\leqslant 10\end{cases}$$

（2）令$y \geqslant 4$，$0 \leqslant t < 1$ 时，$6t \geqslant 4$，$\therefore \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1$

$1 < t \leqslant 10$ 时，$y = -\frac{2}{3}(t-10) \geqslant 4$，$1 < t \leqslant 4$

综上得$\frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 4$，有效治疗时间有$\frac{10}{3}$小时.

【例 4-6-3】　根据市场调查，2013 年某食品的销售量 y（千克）是时间 x（天）的二次函数，时间以这一年的第一天开始（$1 \leqslant x \leqslant 365$）. 已知第 180 天的销售量最高，为 2500 千克，且第 260 天的销售量为 2100 千克.

（1）试写出 $y = f(x)$ 的函数关系式；

（2）如果日销售量大于或等于 900 千克，那么这一天就盈利. 请问这一年中哪些天盈利？

【解】（1）由题意，设 $y = a(x-180)^2 + 2500$

又 $x = 260$ 时，$y = a(x-180)^2 + 2500 = 2100 \Rightarrow a = -\frac{1}{16}$，

$\therefore y = -\frac{1}{16}(x-180)^2 + 2500$，$x \in \mathbf{N}^*$.

（2）$y = -\frac{1}{16}(x-180)^2 + 2500 \geqslant 900$，$x \in \mathbf{N}^*$

$\therefore 20 \leqslant x \leqslant 340$，$x \in \mathbf{N}^*$

$\therefore$从第 20 天到第 340 天盈利.

【例 4-6-4】　某商场购进一批单价为 6 元的日用品，销售一段时间后，为了获得更多利润，商场决定提高销售价格，经试验发现，若按每件 20 元的价格销售时，每月能卖 360 件，若按 25 元销售时，每月能卖 210 件，假设每月销售件数 y 是价格 x（元/件）的一次函数.

（1）试求 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）在商品不积压，且不考虑其他因素下，问销售价格指定为多少时，才能每月获得最大利润？每月获得的最大利润是多少？

【解】（1）设 $y = kx + b$

由已知条件得 $\begin{cases} 360 = 20k + b \\ 210 = 25k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -30 \\ b = 960 \end{cases}$

所以 $y = -30x + 960$.

（2）设利润为 z 元，则

$z = (-30x + 960)(x - 6) = -30(x-19)^2 + 5070$

所以当 $x = 19$ 元/件时，有最大利润 5070 元.

【实战演练】

一、达标检测

1．等腰三角形的周长为 20cm，底边长 y 是腰长 x 的函数，则函数的定义域为　（　　）

A.（0，10）　　B.（0，5）　　C.（5，10）　　D.（$-\infty$，10）

2．某厂年总产值预计以 10%的速度增长，若 2013 年该厂总产值为 1000 万元，则预计 2016 年该厂的总产值为　（　　）

A．1331 万元　　B．1320 万元　　C．1310 万元　　D．1300 万元

3．在 x 克 $a\%$ 的盐水中加入 y 克 $b\%$ 的盐水后，浓度变成 $c\%$，则 y 与 x 的函数关系式是（　　）

A．$y=\dfrac{c-a}{c-b}x$　　B．$y=\dfrac{c-a}{b-c}x$

C．$y=\dfrac{b-c}{a-c}x$　　D．$y=\dfrac{b-c}{c-a}x$

4．G7022 次高铁从南京开往上海，行程 301km，列车出发 1h 后开出 20km，以 240 km/h 匀速行驶，则列车出发后行驶路程 S（km）与匀速行驶时间 t（h）之间的函数关系式是（　　）

A．$S=240t$　　B．$S=20+240t$　　C．$S=240t-20$　　D．$S=301-240t$

5．某汽车运输公司购买了一批豪华大客车投入营运．据市场分析，每辆客车营运的总利润 y（万元）与营运年数 x（$x\in\mathbf{N}^*$）为二次函数关系，已知第四年的营运的总利润为 7 万元，第六年营运的总利润最大，最大为 11 万元，若使每辆客车的营运年平均利润最大，则其营运年数是（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

6．采购某种原料需付手续费 30 元，而原料单价为 120 元/kg．设采购量为 xkg，采购费为 y 元，则采购量 xkg 与采购费为 y（元）之间的函数关系式为_____.

7．某工厂 2010 年的产值为 100 万元，以后每年都以 10%的速度递增，则 2014 年的产值为_____万元.

8．甲、乙两种产品，其利润 P，Q 与投入的资金 a 万元的关系式分别为 $P=\dfrac{a}{3}$，$Q=\dfrac{10}{3}\sqrt{a}$，现共投资 60 万元，问如何分配可使利润最大？

二、直击高考

1．（2010 年单招试题）为赢得 2010 年上海世博会的制高点，某工艺品厂最近设计、生产了一款工艺品进行试销，得到如下数据表：

销售单价 x（单位：元/件）	30	40	50	60
每天销售量 y（单位：件）	500	400	300	200

根据该数据表，可以推测下列函数模型中能较好反映每天销售量 y（单位：件）与销售单价 x（单位：元/件）之间关系的是（　　）

A．$y=kx+b$　　B．$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$

C．$y=\log_a x+b$（$a>0$ 且 $a\neq1$）　　D．$y=a^x+b(a>0$ 且 $a\neq1)$

2.（2008 年单招试题）设甲、乙两城市之间有一列火车作为交通车，已知该列车每次拖挂 5 节车厢，一天能往返 14 次，而如果每次拖挂 8 节车厢，则每天能往返 8 次．每天往返的次数是每次拖挂车厢节数的一次函数，并设每节车厢能载客 100 人．

（1）求这列火车往返次数 y 与每次拖挂车厢节数 x 的函数关系；

（2）问这列火车每天往返多少次，每次应挂多少节车厢才能使营运人数最多？并求出每天最多营运人数．

3.（2009 年单招试题）某工厂有一个容量为 10 吨的水池，水池中有进水管和出水管各一个，某天早晨同时打开进水管和出水管阀门，开始时池中蓄满了水，设经过 x（小时）进水量 P（吨）和出水量 Q（吨）分别为 $P=2x$，$Q=8\sqrt{x}$．

（1）问经过多少小时，水池中的蓄水量 y（吨）最小？并求出最小量；

（2）为防止水池中的水溢出，当水池再次蓄满水时，应关闭进水管阀门，问经过多少小时应关闭进水管阀门？

【提炼反思】

1．用函数的有关知识，建立函数模型来解决实际问题，主要步骤为：（1）审清题意；（2）分析数量关系，建立函数模型，转化为数学问题；（3）用数学知识解决函数模型；（4）检验结果的实际意义，得出结论．

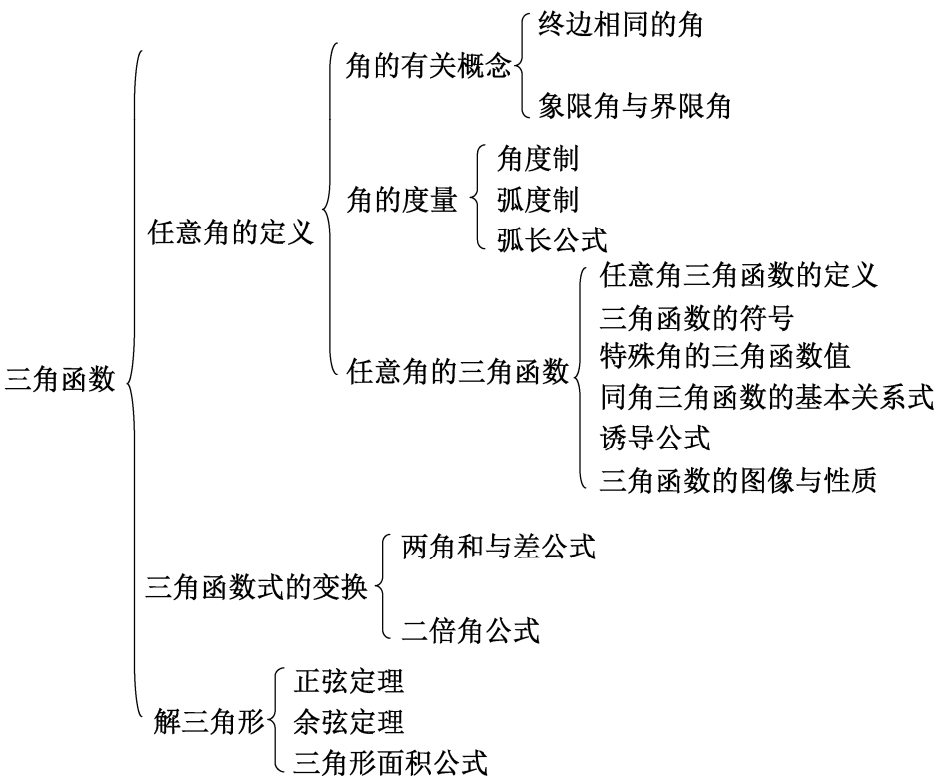
2．数量关系中有常规公式的应用问题：如在商品销售中，销售总金额=销售单价×销售量；在路程问题中，路程=速度×时间等，其实质就是建立一个适当的函数模型，然后用数学的方法加以解决．

3．数量关系中没有常规公式的应用问题：如各种球类比赛的计分规则、跨市邮寄信函的收费标准等，对于这些问题，我们必须首先弄清问题的意思，分析问题中牵涉到哪些数量，弄清这些数量之间的关系．

4．用函数解决实际问题时，要注意定义域，如自变量表示的元素是人、书、房子、车辆等不可分割的个体时，定义域要取非负整数，对于商品价格问题要注意不能为零或负数．

专题五　三角函数

【思维导航】



【考点梳理】

考　　点	要　　求
角的概念推广	了解
弧度制	理解
任意角的三角函数	理解
同角三角函数的基本关系	理解
三角函数的诱导公式	了解
正弦函数的图像与性质	理解
余弦函数的图像与性质	了解
两角和与差的正弦、余弦公式	理解
二倍角公式	了解
正弦型函数	理解
正弦定理、余弦定理	理解

第 1 讲　三角函数的相关概念

【夯实基础】

1．角的相关概念

（1）角：一条射线绕其端点在平面内旋转所形成的图形叫做角．其中：按逆时针方向旋转而成的角为正角，按顺时针方向旋转而成的角为负角，没有旋转时的角为零角．

（2）与角 α 终边相同的角的集合：$S=\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$

★时间过了 4 小时，分针转了_____度．

2．象限角与界限角

设任意角 α 的顶点在坐标原点，始边在 x 轴正半轴上．

（1）若角 α 的终边落在某个象限，就称其为某个象限角．

角所在象限	对应角的集合
第一象限	$S_1=\left\{\alpha\middle\vert 2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$ 或 $(2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{2})$ $(k\in\mathbf{Z})$
第二象限	$S_2=\left\{\alpha\middle\vert 2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$ 或 $(2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$
第三象限	$S_3=\left\{\alpha\middle\vert 2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$ 或 $(2k\pi+\pi,\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ $(k\in\mathbf{Z})$
第四象限	$S_4=\left\{\alpha\middle\vert 2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2k\pi+2\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$ 或 $(2k\pi+\frac{3\pi}{2},\ 2k\pi+2\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$

（2）若角 α 的终边落在坐标轴上，称其为界限角，终边在 x、y 轴上的角的集合分别为 $S_x=\{\alpha\mid\alpha=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$S_y=\left\{\alpha\middle\vert\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$．

★-780° 是　　（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．弧度制

（1）定义：在圆中与半径等长的圆弧所对的圆心角叫做一弧度的角．

长为 l 的弧所对圆心角（正角）$\alpha=\frac{l}{r}$（弧度）（或 $l=|\alpha|\cdot r$）．

（2）弧度与角度的互换：$\pi=180^\circ$．

（3）弧长公式、扇形面积公式

$$l=|\alpha|\cdot r\qquad S_{扇}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$$（其中 α 必须为弧度）

★在半径为 6 的圆上，150° 的圆心角所对的弧长为多少？

4．三角函数的定义

设任意角 α 的顶点在坐标原点，始边在 x 轴正半轴，在其终边上任取一点 $P(x, y)$，$r=|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{y}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

★已知角 α 的终边过点 $P(-5,12)$，求角 α 的正弦、余弦和正切值.

5．三角函数在各个象限内的符号，记忆口诀：一全正，二正弦，三双切，四余弦.

★若 $\sin\theta\cdot\tan\theta<0$，则 θ 为 （　　）

A．第一象限角　　B．第一或二象限角

C．第二象限角　　D．第二或三象限角

【方法导引】

【例 5-1-1】 选择题

（1）若 $\sin\theta\cdot\cos\theta>0$，则 θ 是 （　　）

A．第一象限角　　B．第二象限角

C．第一或第三象限角　　D．第二或第四象限角

（2）在半径为 4 的圆内，60° 的圆心角所对扇形面积为 （　　）

A．480　　B．$\frac{8\pi}{3}$　　C．240　　D．$\frac{4\pi}{3}$

（3）若 α 不是界限角，则 $\frac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|}+\frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}+\frac{\tan\alpha}{|\tan\alpha|}=$ （　　）

A．3　　B．−1　　C．−3　　D．−1 或 3

（4）$\sin30^\circ+\cos60^\circ-\tan30^\circ+\sin120^\circ\cdot\cos150^\circ=$ （　　）

A．$\frac{1-\sqrt{3}}{4}$　　B．$\frac{7-\sqrt{3}}{4}$　　C．$-\frac{3}{4}$　　D．$\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

【解】（1）选 C，一、三象限均符合要求；

（2）选 B，注意圆心角要化为弧度制；

（3）选 D，注意 α 需要分象限来看；

（4）选 A，注意特殊角三角函数值必须记忆.

【例 5-1-2】 若 α 是第一象限的角，问 $\frac{\alpha}{2}$ 是哪个象限的角？$\sin\frac{\alpha}{3}$ 是不是一定为正数？

【解】因为 α 是第一象限的角，所以 $2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$

对 k 分奇偶讨论：

当 $k=2n$，$n\in\mathbf{Z}$ 时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角；当 $k=2n+1$，$n\in\mathbf{Z}$ 时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角.

所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限的角，

又因为 $\frac{2}{3}k\pi<\frac{\alpha}{3}<\frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=2$ 时，$\frac{\alpha}{3}$ 是第三象限的角，此时 $\sin\frac{\alpha}{3}$ 不是正数.

【例 5-1-3】　（1）已知角 α 的终边上一点 $P(-15a,8a)$（$a\in\mathbf{R}$，且 $a\neq0$），求 α 的三个三角函数值.

（2）已知角 α 的终边上有一点 $A(4t,-3t)$（$t\neq0$），求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

（3）已知角 α 的终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

【解】（1）$a>0$ 时，$\sin\alpha=\frac{8}{17}$，$\cos\alpha=-\frac{15}{17}$，$\tan\alpha=-\frac{8}{15}$；

$a<0$ 时，$\sin\alpha=-\frac{8}{17}$，$\cos\alpha=\frac{15}{17}$，$\tan\alpha=-\frac{8}{15}$.

（2）$t>0$ 时，$2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{2}{5}$；$t<0$ 时，$2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{5}$.

（3）终边在第一象限时，取一点（1，$\sqrt{3}$），$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=\sqrt{3}$；

终边在第三象限时，取一点（$-1,-\sqrt{3}$），$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=\sqrt{3}$.

【例 5-1-4】　如图 5-1-1 所示，$\alpha=30°$，$\beta=300°$，OM，ON 分别是角 α，β 的终边.

（1）求终边落在阴影部分（含边界）的所有角的集合；

（2）求终边落在阴影部分、且在 $[0°,360°]$ 上所有角的集合；

（3）求以 OM 为始边，ON 为终边的所有角的集合.

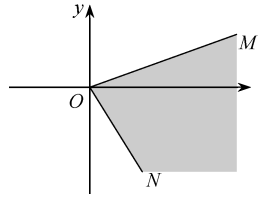


图 5-1-1

【解】（1）$[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{6}]$；

（2）$[0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{3},2\pi]$；

（3）$S=\{\theta\mid\theta=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\boldsymbol{Z}\}$.

【实战演练】

一、达标检测

1．给出下列命题：

（1）小于 $\frac{\pi}{2}$ 的角是锐角；

（2）若α是第一象限的角，则$\frac{\alpha}{2}$必为第一象限的角；

（3）第三象限的角必大于第二象限的角；

（4）相等的角必是终边相同的角；终边相同的角不一定相等；

（5）角2α与角α的终边不可能相同；

（6）若角α与角β有相同的终边，则角$(\alpha-\beta)$的终边必在x轴的非负半轴上.

其中正确的命题有（　　）

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

2．已知角x的终边上一点坐标为$(\sin\frac{5\pi}{6},\cos\frac{5\pi}{6})$，则角$x$的最小正值为（　　）

A．$\frac{5\pi}{6}$　　B．$\frac{11\pi}{6}$　　C．$\frac{5\pi}{3}$　　D．$\frac{2\pi}{3}$

3．若$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{5}$，则角$\alpha$的终边所在象限是（　　）

A．第一象限角　　B．第一或二象限角

C．第三象限角　　D．第四象限角

4．一个半径为r的扇形，如果它的周长等于弧所在半圆的弧长，那么该扇形的面积是_____.

5．若点P从$(1,0)$出发，沿单位圆$x^2+y^2=1$逆时针方向运动$\frac{2\pi}{3}$弧长到达Q点，则Q点坐标为_____.

6．一个扇形AOB的面积是$1\,\text{cm}^2$，它的周长为$4\,\text{cm}$，则弦AB的长等于_____.

7．（1）已知角α的终边经过点$P(4,-3)$，求$2\sin\alpha+\cos\alpha$的值；

（2）已知角α终边上一点P与x轴的距离和与y轴的距离之比为3∶4，求$2\sin\alpha+\cos\alpha$的值.

8．若角α的终边落在直线$15x=8y$上，求$\log_2\left|\frac{1}{\cos\alpha}-\tan\alpha\right|$.

二、直击高考

1.（2009 年单招试题）已知 $P(-3,\ m)$ 是角 α 终边上一点，若 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，则 $m=$（　　）

A．-4　　B．-3　　C．3　　D．4

2.（2002 年单招试题）已知 α 的终边上过点 $P(4t,-3t)$，$t>0$，则 $\sin\alpha=$（　　）

A．$\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$-\frac{4}{5}$　　D．$\frac{3}{5}$

3.（2010 年单招试题）已知角 α 的终边经过点（-3，4），则 $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)-\tan(\pi-\alpha)=$ _____.

【提炼反思】

本节的重点是三角函数定义，注意任意角的三角函数值与终边上点的位置无关，只与角的终边的位置有关；要善于从三角函数定义判断：（1）正弦函数，余弦函数，正切函数的定义域；（2）三角函数在各象限内的符号.

第 2 讲　三角变换与求值

【夯实基础】

1．同角三角函数的基本恒等式

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；　$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

★已知 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$，则 $\tan\alpha=$ _____.

2．诱导公式

（1）记忆口诀：纵变横不变，符号看象限；

（2）任意角诱导公式的转化规律：负角⇒正角⇒0°～360°之间的角⇒锐角.

★如果 $\cos\alpha=\frac{1}{5}$，且 α 是第四象限的角，那么 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=$ _____.

3．两角和、两角差，倍角正弦、余弦、正切的公式

（1）两角和与两角差的三角函数公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

（2）二倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

（3）辅助角公式

$a\sin\alpha\pm b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha\pm\varphi)$，其中 a，$b>0$，$\tan\varphi=\frac{b}{a}$.

（4）降次、升次公式

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\qquad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\sin\alpha=(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2})^2\qquad 1-\sin\alpha=(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2})^2$$

★已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，求 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})$ 的值.

★若△ ABC 的内角 A 满足 $\sin 2A=\frac{2}{3}$，则 $\sin A+\cos A=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{15}}{3}$　　C. $\frac{5}{3}$　　D. $-\frac{5}{3}$

【方法导引】

【例 5-2-1】 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

（1）求 $\frac{\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha+\cos 2\alpha}$ 的值；（2）求 $\tan(\alpha-\frac{5\pi}{4})$ 的值.

【解】（1）由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，得 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，

所以 $\frac{\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{3\cos^2\alpha-1}=20$.

（2）∵ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$，∴ $\tan(\alpha-\frac{5\pi}{4})=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{7}$.

【例 5-2-2】 已知 α，$\beta\in(\frac{3\pi}{4},\ \pi)$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，$\sin(\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{12}{13}$，则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=$_____.

【解】 α，$\beta\in(\frac{3\pi}{4},\ \pi)$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，$\sin(\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{12}{13}$，$\alpha+\beta\in(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi)$，

$\beta-\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4})$，∴ $\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，$\cos(\beta-\frac{\pi}{4})=-\frac{5}{13}$，

则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\cos[(\alpha+\beta)-(\beta-\frac{\pi}{4})]=\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\frac{\pi}{4})+\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\frac{\pi}{4})$

$=\frac{4}{5}\cdot(-\frac{5}{13})+(-\frac{3}{5})\cdot\frac{12}{13}=-\frac{56}{65}$.

【例 5-2-3】　已知 $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{5}{2}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$．求 $\cos 2\alpha$ 和 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})$ 的值．

【解】解法一： 由 $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{5}{2}$，得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{5}{2}$，则 $\frac{2}{\sin 2\alpha}=\frac{5}{2}$，$\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$．

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，所以 $2\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\cos 2\alpha=-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=-\frac{3}{5}$，

$\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\sin 2\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$．

解法二： 由 $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{5}{2}$，得 $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{5}{2}$，解得 $\tan\alpha=2$ 或 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$．

由已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，故舍去 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，得 $\tan\alpha=2$．

因此，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$．那么 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\frac{3}{5}$，

且 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

故 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\sin 2\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$．

【例 5-2-4】　已知 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 是关于 x 的一元二次方程 $3x^2-x+2m-5=0$ 的两实根，求实数 m 的值．

【解】 由题意知

$$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}\\ \sin\alpha\cos\alpha=\frac{2m-5}{3}\end{cases}，(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha，1+\frac{2(2m-5)}{3}=\frac{1}{9}，m=\frac{11}{6}．$$

【实战演练】

一、达标检测

1．若 $\alpha=\frac{11\pi}{3}$，则 $\tan\alpha\cos\alpha=$　（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2．在△ ABC 中，$\cos A\cos B>\sin A\sin B$，则△ ABC 为　（　　）

A．锐角三角形　　B．直角三角形　　C．钝角三角形　　D．无法判定

3．已知 x 为第三象限角，化简 $\sqrt{1-\cos 2x}=$　（　　）

A．$\sqrt{2}\sin x$　　B．$-\sqrt{2}\sin x$　　C．$\sqrt{2}\cos x$　　D．$-\sqrt{2}\cos x$

4．等式 $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{4m-6}{4-m}$ 有意义，则 m 的取值范围是_____．

5．若 α，β 均为锐角，且 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，则 $\cos\beta=$_____．

6．已知角 θ 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴正半轴重合，终边在直线 $2x-y=0$ 上，则

$\dfrac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\theta)+\cos(\pi-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)-\sin(\pi-\theta)}=$_____.

7. 已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+\cos 2x$.（1）求 $f(\frac{\pi}{4})$ 的值；（2）设 $\alpha\in(0,\pi)$，$f(\frac{\alpha}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

8. 已知 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{4})$，$\beta\in(0,\pi)$，且 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=-\frac{1}{7}$，求 $\tan(2\alpha-\beta)$ 及角 $2\alpha-\beta$ 的值.

二、直击高考

1.（2011 年单招试题）$\cos 120^\circ+\tan 225^\circ=$_____.

2.（2010 年单招试题）已知 α 为锐角，且点 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 在曲线 $6x^2+y^2=5$ 上．求：（1）$\cos 2\alpha$ 的值；（2）$\tan(2\alpha-\frac{\pi}{4})$ 的值.

3.（2009 年单招试题）已知向量 $\vec{a}=(\sin\alpha,3)$，$\vec{b}=(\cos\alpha,1)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，求下列各式的值：（1）$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)$；（2）$4\sin^2\alpha-\sin 2\alpha$.

【提炼反思】

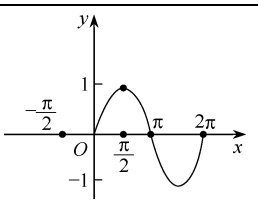
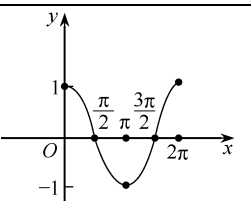
本节课的重点是同角三角函数基本关系式、诱导公式及两角的和、差、正弦、余弦、正

切的公式。要引导学生在理解的基础上记忆，要善于分析题目所给的条件，习题练习的重点应放在培养学生基本的综合能力和运算能力上，对变换的技巧性应把握适当的“度”，要善于简单综合，而不需要关注那些过于烦琐的、技巧性高的变换难题，要注意体会角的范围如何确定，对三角恒等变换有哪些限定作用.

第 3 讲　三角函数的图像和性质

【夯实基础】

1．正弦函数及余弦函数的图像和性质

函　数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
图　像		
定义域	$\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$	$\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$
值　域	$\{y\mid\lvert y\rvert\leqslant 1\}$	$\{y\mid\lvert y\rvert\leqslant 1\}$
奇偶性	奇函数	偶函数
周　期	$T=2\pi$	$T=2\pi$
单调性	在$[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}]$（$k\in\mathbf{Z}$）上递增 在$[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$（$k\in\mathbf{Z}$）上递减	在$[2k\pi-\pi,\ 2k\pi]$（$k\in Z$）上递增 在$[2k\pi,\ 2k\pi+\pi]$（$k\in Z$）上递减
最　值	当$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$y_{\max}=1$ 当$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$y_{\min}=-1$	当$x=2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$y_{\max}=1$ 当$x=2k\pi+\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$y_{\min}=-1$

★若函数 $y=a-b\sin x$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$，最小值为 $-\frac{1}{2}$，则 a，b 的值分别为_____.

★已知函数 $f(x)=ax+b\sin^3 x+1$（a，b 为常数），且 $f(5)=7$，则 $f(-5)=$_____.

2．正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$）

（1）几个概念

A：振幅；ω：角速度；φ：初相位；$T=\frac{2\pi}{\omega}$：周期.

★ $y=8\sin(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{8})$ 的振幅、初相位、周期、角速度分别是_____.

（2）表达式的确定：A 由最值确定；ω 由周期确定；φ 由图像上的特殊点确定.

★已知图 5-3-1 所示为函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)\ (|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的图像上的一段，则　　（　　）

A．$\omega=\frac{10}{11}$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$　　B．$\omega=\frac{10}{11}$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$

C．$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$　　D．$\omega=2$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$

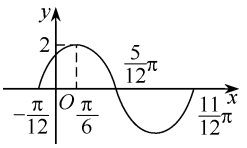


图 5-3-1

（3）图像的画法

① “五点法”：设 $X=\omega x+\varphi$，令 $X=0$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π，求出相应的 x 值，计算得出五点的坐标，描点后得出图像；

② 图像变换法：函数 $y=\sin x$ 的图像纵坐标不变，横坐标向左（$\varphi>0$）或向右（$\varphi<0$）平移 $|\varphi|$ 个单位得 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图像；函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 图像的纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$，得到函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像；函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 图像的横坐标不变，纵坐标变为原来的 A 倍，得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像；函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图像的横坐标不变，纵坐标向上（$k>0$）或向下（$k<0$）平移 $|k|$ 个单位，得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 的图像．

特别注意：若由 $y=\sin(\omega x)$ 得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像，则横坐标向左或向右应平移 $|\frac{\varphi}{\omega}|$ 个单位．

★为了得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图像，只需把函数 $y=\sin 2x$ 的图像　　（　　）

A．向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位　　B．向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

C．向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位　　D．向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

（4）函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 性质研究，类比研究 $y=\sin x$ 的性质，只需将 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中的 $\omega x+\varphi$ 看成 $y=\sin x$ 中的 x，但在求 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的单调区间时，要特别注意 A 和 ω 的符号，通过诱导公式先将 ω 化正．

★求函数 $y=5\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的单调递减区间，最大值及取最大值时 x 的取值．

【方法导引】

【例 5-3-1】　已知函数 $y=4\sin(5x-\frac{\pi}{3})$，求：

（1）函数的振幅、角速度、初相位、周期；

（2）函数的最小值及取最小值时 x 的取值；

（3）函数的对称轴与对称中心；

（4）函数的单调递减区间．

【解】（1）函数的振幅为 4，角速度为 5，初相位为 $-\frac{\pi}{3}$，周期为 $T=\frac{2\pi}{5}$．

（2）函数的最小值为 –4，此时 $5x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$x=-\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

（3）因为 $5x-\frac{\pi}{3}=k\pi$，$x=\frac{\pi}{15}+\frac{1}{5}k\pi$

函数的对称中心（$\frac{\pi}{15}+\frac{1}{5}k\pi$，0）

函数的对称轴为：$5x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{5}$，$k\in\mathbf{Z}$.

（4）函数的单调递减区间为

$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 5x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$\frac{\pi}{6}+\frac{2}{5}k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{30}+\frac{2}{5}k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

即 $[\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{5},\frac{11\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5}]$，$k\in\mathbf{Z}$.

【例 5-3-2】 求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{1-2\cos x}$；（2）$y=\lg(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

【解】（1）∵ $1-2\cos x\geqslant 0$　∴ $\cos x\leqslant\frac{1}{2}$

∴定义域为：$\{x\,|\,2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{3}(k\in Z)\}$

（2）由 $\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}>0$，即 $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$

在 $[0,2\pi]$ 一个周期内，满足 $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的 x 的取值 $x\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$

∴定义域为 $(2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3})$（$k\in\mathbf{Z}$）.

【例 5-3-3】 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的部分图像如图 5-3-2 所示.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期及解析式；

（2）如何由 $y=\sin x$ 的图像得到该函数的图像.

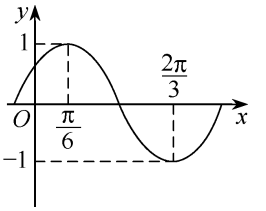


图 5-3-2

【解】（1）由图可得 $A=1$，$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\pi$，$\omega=2$

当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)=1$，可得 $\sin(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi)=1$，

∴ $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，∴ $\varphi=\frac{\pi}{6}$　∴ $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

（2）函数 $y=\sin x$ 的图像纵坐标不变，横坐标向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得 $y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$ 的图像；函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$ 图像的纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$，得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图像.

【例 5-3-4】 已知函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-\frac{3}{2}$，$x\in\mathbf{R}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间；

（2）求函数 $f(x)$ 在 $x\in[-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}]$ 上的最值.

【解】（1） $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+(1+\cos 2x)-\frac{3}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

$\therefore f(x)$ 的最小周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

由题意得 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z$，即 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}$

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{\pi}{6}],\ k\in\mathbf{Z}$.

（2）因为 $x\in[-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}]$ $\therefore 2x\in[-\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}]$ $\therefore 2x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}]$

$\therefore \sin(2x+\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},\ 1]$

$\therefore f(x)\in[-\frac{1}{2},\ 1\]$ ∴最大值为 1，最小值为 $-\frac{1}{2}$.

【实战演练】

一、达标检测

1．若函数 $y=\cos(\omega x+\frac{\pi}{3})$（$\omega>0$）的图像相邻两条对称轴间距离为 $\frac{\pi}{2}$，则 ω 等于（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．12　　C．2　　D．4

2．函数 $y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$（$-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$）的值域为（　　）

A．[−2，2]　　B．[−2，0]　　C．[0，2]　　D．[$-\sqrt{3}$，0]

3．函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $A>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的图像如图 5-3-3 所示．为了得到 $f(x)$ 的图像，则只要将 $g(x)=\sin 2x$ 的图像（　　）

A．向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

B．向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C．向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

D．向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

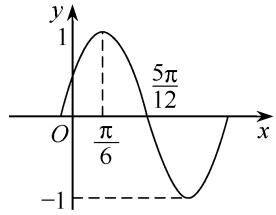


图 5-3-3

4．函数 $y=\sin\omega x$（$\omega>0$）的部分图像如图 5-3-4 所示，点 A，B 是最高点，点 C 是最低点，若△ ABC 是直角三角形，则 ω 的值为_____.

5．方程$2\cos(x-\frac{\pi}{4})=1$在区间（0，π）内的解是_____.

6．函数$y=2\sin(\frac{\pi}{6}-2x)=1$（$x\in[0，\pi]$）为增函数的区间是_____.

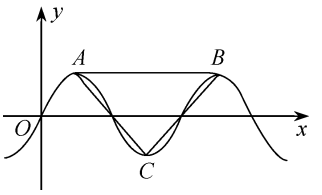


图 5-3-4

7．已知函数$f(x)=\cos(\frac{\pi}{3}+x)\cos(\frac{\pi}{3}-x)-\sin x\cos x+\frac{1}{4}$.

（1）求函数$f(x)$的最小正周期和最大值；

（2）求函数$f(x)$在$[0，\pi]$上的单调递减区间.

8．已知函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）在一个周期内的图像的最高点为（$\frac{\pi}{4}$，3），最低点为（$\frac{7\pi}{12}$，$-3$），求：（1）这个函数的解析式；（2）函数的振幅、角速度、初相位、周期；（3）函数的最大值及取最大值时x的取值；（4）函数的对称轴与对称中心.

二、直击高考

1．（2009 年单招试题）已知函数$f(x)=\sin\omega x$（$\omega>0$）的最小正周期为π，则该函数的一个单调递减区间是　　（　　）

A．$[-\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{4}]$　　B．$[\frac{\pi}{4}，\frac{3\pi}{4}]$　　C．$[-\frac{\pi}{3}，\frac{\pi}{3}]$　　D．$[\frac{\pi}{2}，\frac{3\pi}{2}]$

2．（2013 年单招试题）如函数$f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$（$\omega>0$）的最小正周期为π，则该函数的图像　　（　　）

A．关于点（$\frac{\pi}{3}$，0）对称　　B．关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称

C．关于点（$\frac{\pi}{4}$，0）对称　　D．关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称

3．（2012 年单招试题）已知函数 $f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos x$．

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）若 $f(\alpha)=\dfrac{1}{2}$，$\alpha\in(-\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3})$，求 $\sin\alpha$ 的值．

【提炼反思】

本节的重点是正弦函数与余弦函数图像与性质、正弦型函数，要引导学生数形结合解决问题，在对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 性质研究时，注意类比 $y=\sin x$ 的性质，将 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中的 $\omega x+\varphi$ 看成 $y=\sin x$ 中的 x，在求 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的单调区间时，要特别注意 A 和 ω 的符号，通过诱导公式先将 ω 化正．

第 4 讲　解三角形

【夯实基础】

1．正弦定理

分　类	内　容
定理	$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（其中 R 是三角形外接圆的半径）
变形公式	① $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ ② 角化边　$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$ ③ 边化角　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$
解决的问题	① 已知两角和任一边，求其他两边和另一角 ② 已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角

★在△ ABC 中，若 $\angle A=60°$，$\angle B=45°$，$BC=3\sqrt{2}$，则 $AC=$　　（　　）

A．$4\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2．余弦定理

分　类	内　容
定理	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc(1+\cos A)$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-2ab(1+\cos C)$

续表

分　类	内　容
变形公式	$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，　$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
解决的问题	① 已知三边，求各角 ② 已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角

★在△ ABC 中，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=2$，则 A 等于　　（　　）

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．75°

3．三角形中常用的面积公式

（1）$S=\dfrac{1}{2}ah$（h 表示边 a 上的高）；

（2）$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$．

★△ ABC 中，$\angle B=120°$，$AC=7$，$AB=5$，则△ ABC 的面积为_____．

【方法导引】

【例 5-4-1】　（1）在△ ABC 中，若 $a=3$，$b=\sqrt{3}$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\angle C$ 的大小为_____．

（2）在△ ABC 中，若 $2\cos B\sin A=\sin C$，则△ ABC 的形状一定是　　（　　）

A．等腰直角三角形　　B．直角三角形

C．等腰三角形　　D．等边三角形

（3）在△ ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $a^2+b^2=2c^2$，则 $\cos C$ 的最小值为　　（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$-\dfrac{1}{2}$

【解】（1）由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 得，$\angle C=90°$．

（2）由题意 $2\sin A\cos B=\sin C=\sin(A+B)=\sin(A+B)+\sin(A-B)$，

$\therefore \sin(A-B)=0$，$\therefore A=B$，所以选 C．

（3）$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\geqslant\dfrac{2c^2-c^2}{a^2+b^2}=\dfrac{1}{2}$，故选 C．

【例 5-4-2】　已知△ ABC 的周长为 $\sqrt{2}+1$，且 $\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$．

（1）求边 AB 的长；

（2）若△ ABC 的面积为 $\dfrac{1}{6}\sin C$，求角 C 的度数．

【解】（1）由题意及正弦定理，得 $AB+BC+AC=\sqrt{2}+1$，$BC+AC=\sqrt{2}AB$，

两式相减，得 $AB=1$.

（2）由△ ABC 的面积 $\frac{1}{2}BC\cdot AC\cdot\sin C=\frac{1}{6}\sin C$，得 $BC\cdot AC=\frac{1}{3}$，

由余弦定理，得

$$\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{(AC+BC)^2-2AC\cdot BC-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{1}{2},$$

所以 $C=60°$.

【例 5-4-3】 在△ ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足 $\cos\frac{A}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$.（1）求△ ABC 的面积；（2）若 $c=1$，求 a 的值.

【解】（1）$\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1=2\times(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2-1=\frac{3}{5}$

又 $A\in(0,\pi)$，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4}{5}$，而

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos A=\frac{3}{5}bc=3$，所以 $bc=5$，

所以△ ABC 的面积为：

$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times5\times\frac{4}{5}=2$.

（2）由（1）知 $bc=5$，而 $c=1$，所以 $b=5$

所以 $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{25+1-2\times3}=2\sqrt{5}$.

【例 5-4-4】 （2001 年单招试题）如图 5-4-1 所示，某观测站 C 位于 A 域的南偏西 20°，由 A 城出发有一条公路走向是南偏东 40°，B 城在这条公路上，现有一人从 B 城出发，沿这条公路向 A 城走去，走 20 千米后，到达 D 处，由 C 处测得 CB 间距离为 31 千米，CD 间距离为 21 千米，问此人还要走多远，到达 A 城？

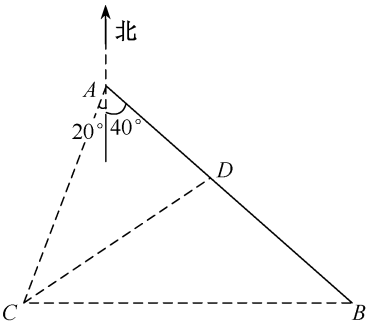


图 5-4-1

【解题分析】将题中所给出的数据标在图中对应的位置，然后再利用正弦、余弦定理求解。

【解】在△ BCD 中，$\cos\angle CDB=\frac{21^2+20^2-31^2}{2\times21\times20}=-\frac{1}{7}$

由题意，则 $\sin\angle ADC=\sin\angle CDB=\sqrt{1-(\frac{1}{7})^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

在△ ACD 中，$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}$，$\therefore AC=\frac{21\times\frac{4\sqrt{3}}{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=24$

又∵ $\cos\angle ACD=\cos[180°-(\angle CAD+\angle ADC)]$

$=-\cos(\angle CAD+\angle ADC)$

$=-\cos60°\cos\angle ADC+\sin60°\sin\angle ADC$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{11}{14}$

$\therefore AD=\sqrt{21^2+24^2-2\times21\times24\times\frac{11}{14}}=\sqrt{225}=15$

此人还要走15千米到达 A 城.

【实战演练】

一、达标检测

1．在△ ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$，则角 B 的值为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$　　D．$\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

2．在△ ABC 中，若 $\frac{\sin C}{\sin A}=2$，$b^2-a^2=\frac{3}{2}ac$，则 $\cos B=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{5}$

3．在△ ABC 中，$a^2+b^2-ab=c^2=2\sqrt{3}S_{\triangle ABC}$，则△ ABC 一定是（　　）

A．等腰三角形　　B．直角三角形

C．等边三角形　　D．等腰直角三角形

4．在△ ABC 中，角 A，B 的对边分别是 a，b，若 $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$，则△ ABC 为（　　）

A．等腰三角形　　B．直角三角形

C．等腰三角形或直角三角形　　D．等腰直角三角形

5．在△ ABC 中，$\sin A+\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AC=4$，$AB=5$，则△ ABC 的面积是_____.

6．在△ ABC 中，$b^2=ac$，且 $a+c=3$，$\cos B=\frac{3}{4}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$_____.

7．在△ ABC 中，$AB=\sqrt{3}$，$BC=3$，$AC=4$，AC 边中线 BD 的长为_____.

8．在△ ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$B=\frac{\pi}{3}$，$\cos A=\frac{4}{5}$，$b=\sqrt{3}$.

（1）求 $\sin C$ 的值；

（2）求△ ABC 的面积.

9．已知△ ABC 的角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，设向量 $\vec{m}=(a,\ b)$，$\vec{n}=(\sin B,\ \sin A)$，$\vec{p}=(b-2,\ a-2)$．

（1）若 $\vec{m}\ //\ \vec{n}$，求证：△ ABC 为等腰三角形；

（2）若 $\vec{m}\perp\vec{p}$，边长 $c=2$，$\angle C=\dfrac{\pi}{3}$，求△ ABC 的面积．

二、直击高考

1．（2010 年单招试题）在△ ABC 中，若 $a=4$，$b=4\sqrt{3}$，$\angle A=30^\circ$，则 $\angle B$ 等于（　　）

A．120°　　B．120° 或 30°　　C．60°　　D．60° 或 120°

2．（2011 年单招试题）设 a，b，c 分别是△ ABC 的三个内角 A，B，C 所对的边，S 是△ ABC 的面积，已知 $a=4$，$b=5$，$S=5\sqrt{3}$．求：（1）角 C；（2）c 边的长度．

3．（2013 年单招试题）已知△ ABC 的三个内角 A，B，C 所对应的边分别为 a，b，c，若 $\tan A+\tan B=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan A\tan B$，$a=2$，$c=\sqrt{19}$．求：

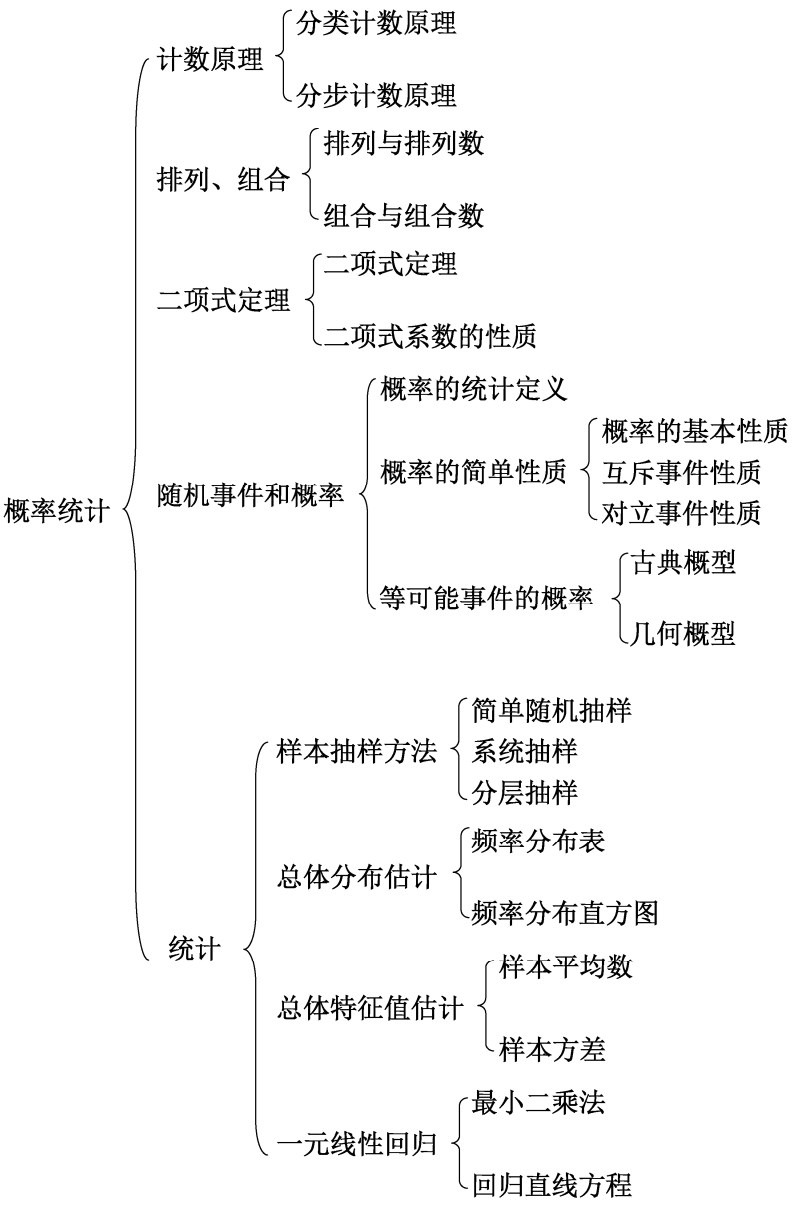
（1）角 C 的值；（2）△ ABC 的面积 S．

【提炼反思】

本节课重点是正、余弦定理公式、三角形面积公式及三角形形状的判断．处理三角形问题，要多角度（几何作图，三角函数定义，正、余弦定理，勾股定理等角度）去理解．“边边角”型问题可能有两解、一解、无解的三种情况，注意各个公式的变形及使用，注意角有无范围限制．

专题六　概率统计

【思维导航】



【考点梳理】

考　点	要　求
计数原理	理解
随机事件和概率	理解
概率的简单性质	理解
等可能事件的概率	理解
总体、样本和抽样方法	了解
总体分布估计	理解
总体特征值估计	了解
一元线性回归	了解
排列	理解
组合	理解
二项式定理	了解

第1讲　排列与组合

【夯实基础】

1．计数原理

（1）分类计数原理（加法原理）：完成一件事有 n 类办法，各类办法分别有 m_1，m_2，…，m_n 种方法，则完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法．

（2）分步计数原理（乘法原理）： 完成一件事需要分成 n 个先后步骤，各步骤分别有 m_1，m_2，…，m_n 种方法，则完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种方法．

★书架上层放有 12 本不同的语文书，下层放有 7 本不同的数学书，现从书架上任取 1 本书，不同的取法有_____种；一商场有 4 个大门，商场内有 3 部上楼的电梯，一顾客从商场外到商场二楼购物，不同的走法有_____种．

2．排列与排列数

（1）排列的概念

从 n 个不同元素中，任取 m（$m\leqslant n$）个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列．

（2）排列数

从 n 个不同元素中取出 m（$m\leqslant n$）个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，记作 A_n^m．

（3）排列数公式

$$\mathrm{A}_n^m=n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}\ (m,\ n\in\mathbf{N}^*,\ m\leqslant n).$$

①若 $m=n$，排列称为全排列，记为 $\mathrm{A}_n^n=1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)n=n!$（称为 n 的阶乘）；若 $m<n$，排列称为选排列；②规定 $0!=1$．

★（1）由数字1，2，3，4，5可以组成多少个允许重复三位数？

（2）由数字1，2，3，4，5可以组成多少个不允许重复三位数？

（3）由数字0，1，2，3，4，5可以组成多少个不允许重复三位数？

3．组合与组合数

（1）组合的概念

从n个不同元素中，任取m（$m\leqslant n$）个元素并成一组，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个组合.

（2）组合数

从n个不同元素中取出m（$m\leqslant n$）个元素的所有组合的个数，叫做从n个不同元素中取出m个元素的组合数，记作C_n^m.

（3）组合数公式

$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$（规定$C_n^0=1$）.

（4）组合数的两个性质

①$C_n^m=C_n^{n-m}$；②$C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$.

★从42名学生中挑选5人组成班委，不同的选法共有_____种，从42名学生中挑选2人分别担任班长、团委书记，不同的选法共有_____种.

4．二项式定理

（1）二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$.

（2）二项展开式通项公式：$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$（$r=0$，1，2，…，n）.

（3）二项式系数的性质：

①在二项展开式中，与首末两项“等距离”的两项的二项式系数相等，即：$C_n^m=C_n^{n-m}$.

②如果二项式的幂指数是偶数，中间一项的二项式系数最大；如果二项式的幂指数是奇数，中间两项的二项式系数相等且最大.

③所有二项式系数和等于2^n，即$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$.

④奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和，即$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots=2^{n-1}$.

★ 试求：$(x^3-\dfrac{2}{x^2})^5$的展开式中x^5的系数.

【方法导引】

【例 6-1-1】 （1）7 位同学站成一排，共有多少种不同的排法？

（2）7 位同学站成两排（前 3 后 4），共有多少种不同的排法？

（3）7 位同学站成一排，其中甲站在中间的位置，共有多少种不同的排法？

（4）7 位同学站成一排，甲、乙只能站在两端的排法共有多少种？

（5）7 位同学站成一排，甲、乙不能站在排头和排尾的排法共有多少种？

【解】（1）$A_7^7 = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 7! = 5040$

（2）$A_7^7 = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 7! = 5040$

（3）$A_6^6 = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$

（4）第一步 甲、乙站在两端有 A_2^2 种；第二步 余下的 5 名同学进行全排列有 A_5^5 种；则共有 $A_2^2\ A_5^5$=240 种排列方法.

（5）**解法一**（直接法）：第一步 从（除去甲、乙）其余的 5 位同学中选 2 位同学站在排头和排尾有 A_5^2 种方法；第二步 从余下的 5 位同学中选 5 位进行排列（全排列）有 A_5^5 种方法，所以一共有 $A_5^2\ A_5^5$=2400 种排列方法.

解法二（排除法）：若甲站在排头有 A_6^6 种方法；若乙站在排尾有 A_6^6 种方法；若甲站在排头且乙站在排尾则有 A_5^5 种方法. 所以甲不能站在排头，乙不能排在排尾的排法共有 $A_7^7 - 2A_6^6 + A_5^5$=2400 种.

【例 6-1-2】 7 位同学站成一排.

（1）甲、乙两同学必须相邻的排法共有多少种？

（2）甲、乙两同学不能相邻的排法共有多少种？

（3）甲、乙两同学必须相邻，而且丙不能站在排头和排尾的排法有多少种？

【解】（1）先将甲、乙两位同学“捆绑”在一起看成一个元素与其余的 5 个元素（同学）一起进行全排列有 A_6^6 种方法；再将甲、乙两个同学“松绑”进行排列有 A_2^2 种方法. 所以这样的排法一共有 $A_6^6\ A_2^2$=1440 种.

（2）（插空法）先将其余五个同学排好有 A_5^5 种方法，此时他们留下六个位置（就称为“空”），再将甲、乙同学分别插入这六个位置（空）有 A_6^2 种方法，所以一共有 $A_5^5A_6^2 = 3600$ 种方法.

（3）**解法一**：将甲、乙两同学“捆绑”在一起看成一个元素，此时一共有 6 个元素，因为丙不能站在排头和排尾，所以可以从其余的 5 个元素中选取 2 个元素放在排头和排尾，有 A_5^2 种方法；将剩下的 4 个元素进行全排列有 A_4^4 种方法；最后将甲、乙两个同学“松绑”进行排列有 A_2^2 种方法. 所以这样的排法一共有 $A_5^2\ A_4^4\ A_2^2$=960 种方法.

解法二：将甲、乙两同学“捆绑”在一起看成一个元素，此时一共有 6 个元素，若丙站在排头或排尾有 $2A_5^5$ 种方法，所以丙不能站在排头和排尾的排法有 $(A_6^6 - 2A_5^5)\cdot A_2^2 = 960$ 种方法.

【例 6-1-3】 100 件产品中有合格品 90 件，次品 10 件，现从中抽取 4 件检查.

（1）都不是次品的取法有多少种？

（2）至少有 1 件次品的取法有多少种？

（3）不都是次品的取法有多少种？

【解】（1）$C_{90}^4=2555190$；

（2）$C_{100}^4-C_{90}^4=C_{10}^1C_{90}^3+C_{10}^2C_{90}^2+C_{10}^3C_{90}^1+C_{10}^4=1366035$；

（3）$C_{100}^4-C_{10}^4=C_{90}^1C_{10}^3+C_{90}^2C_{10}^2+C_{90}^3C_{10}^1+C_{90}^4=3921015$.

【例 6-1-4】　（1）求$(2x^2-\frac{1}{x})^6$的展开式中的常数项；

（2）已知$(1+x)^n$的展开式中，x^3的系数是 x 的系数的 7 倍，求 n 的值；

（3）若$(1-2x)^{2004}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+2004x^{2004}$，求$(a_0+a_1)+(a_0+a_2)+\cdots+(a_0+a_{2004})$.

【解】（1）$T_{r+1}=C_6^r(2x^2)^{6-r}\cdot(-\frac{1}{x})^r=(-1)^r\cdot2^{6-r}\cdot C_6^rx^{12-3r}$

依题意 $12-3r=0$，解得 $r=4$

故$(-1)^4\cdot2^2C_6^2=60$为所求的常数项.

（2）依题意 $C_n^3=7C_n^1$，即$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=7n$

由于 $n\in\mathbf{N}$，整理得 $n^2-3n-40=0$，解得 $n=8$.

（3）因为$(1-2x)^{2004}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+2004x^{2004}$，

令 $x=1$，有$(1-2)^{2004}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2004}=1$

令 $x=0$，有$(1-0)^{2004}=a_0=1$

故原式$=(a_0+a_1+a_2+...+a_{2004})+2003a_0=1+2003=2004$.

【实战演练】

一、达标检测

1．$(x+\frac{2}{\sqrt{x}})^6$ 展开式中常数项是　（　　）

A．第 4 项　　B．$2^4C_6^4$　　C．C_6^4　　D．2

2. 假设200件产品中有3件次品，现在从中任取5件，其中至少有2件次品的抽法有（　　）

A．$C_3^2C_{198}^3$种　　B．（$C_3^2C_{197}^3+C_3^3C_{197}^2$）种

C．（$C_{200}^5-C_{197}^4$）种　　D．（$C_{200}^5-C_3^1C_{197}^4$）种

3．6 位男学生和 3 位女学生排成一排拍照片，其中任意两名女学生不站在一起，则不同的站法有　（　　）

A．151200　　B．7200　　C．3600　　D．210

4．记者要为 6 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照，要求排成一排，2 位老人相邻且排在中间，不同的排法共有　（　　）

A．1440　　B．960　　C．720　　D．480

5．由 0，1，2，3 这四个数字可以组成没有重复数字且不能被 5 整除的四位数的个数是　（　　）

A．24 个　　B．12 个　　C．6 个　　D．4 个

6．4 名男歌手和 2 名女歌手联合举行一场音乐会，出场顺序要求两名女歌手之间恰有一名男歌手，共有出场方案的种数是（　　）

A．$6A_3^3$　　B．$3A_3^3$　　C．$2A_3^3$　　D．$A_2^2A_4^1A_4^4$

7．若平面内有 10 个点，则以其中每 2 个点为端点的线段共有_____条，以其中每 2 个点为端点的有向线段共有_____条．

8．若 $C_{13}^{x+1}=C_{13}^{2x-3}$，则 $x=$_____．

9．5 名男生和 6 名女生组成至少有 2 个男生参加的四人实践活动小组，组成方法共____种．

10．设 $(2x-4)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4$ 的值为____．

11．从编号为 1，2，3，…，10，11 的共 11 个球中，取出 5 个球，使得这 5 个球的编号之和为奇数，则一共有多少种不同的取法？

12．（1）6 本不同的书全部送给 5 人，有多少种不同的送书方法？

（2）5 本不同的书全部送给 6 人，每人至多 1 本，有多少种不同的送书方法？

（3）5 本相同的书全部送给 6 人，每人至多 1 本，有多少种不同的送书方法？

（4）7 位同学站成一排，甲、乙和丙三个同学都相邻的排法共有多少种？

（5）7 位同学站成一排，甲、乙和丙三个同学都不能相邻的排法共有多少种？

二、直击高考

1．（2012 年单招试题）用数字 0，3，5，7，9 可以组成_____个没有重复数字的五位数（用数字作答）．

2．（2010 年单招试题）在二项式 $(1-2x)^9$ 的展开式中，x^3 的系数等于_____（用数字作答）．

3．（2008 年单招试题）有六名学生排成一排，其中甲、乙两人不相邻的排法有（　　）

A．720 种　　B．120 种　　C．480 种　　D．600 种

【提炼反思】

1．分步计数原理与分类计数原理是关于计数的两个基本原理，两者的区别在于分步计数原理和分步有关，分类计数原理与分类有关．

2．排列与组合主要研究从一些不同元素中，任取部分或全部元素进行排列或组合，求共有多少种方法的问题．区别排列问题与组合问题要看是否与顺序有关，与顺序有关的属于排列问题，与顺序无关的属于组合问题．

3．解排列组合题的基本方法：

（1）优限法：先考虑有限制条件的元素的要求，再考虑其他元素；先考虑有限制条件的位置的要求，再考虑其他位置；

（2）插空法：某些元素不能相邻或某些元素要在某特殊位置时可采用插空法，即先安排好没有限制条件的元素，然后再把有限制条件的元素按要求插入排好的元素之间；

（3）捆绑法：把相邻的若干个特殊元素“捆绑”为一个大元素，然后再与其余“普通元素”全排列，最后再“松绑”，将特殊元素在这些位置上全排列．

4．二项式定理注意事项：

（1）求二项展开式中具有某特定性质的项，关键是确定 r 的值或取值范围．二项式系数与二项展开式中各项的系数不是同一概念，要加以区分．

（2）求二项展开式中的多个系数的和或特殊项的系数，多用赋值法．

第 2 讲　概　率

【夯实基础】

1．事件的类型

（1）随机事件：在一定条件下可能发生，也可能不发生的事件．一般用大写字母 A，B，C，……表示．

（2）必然事件：在一定条件下必然发生的事件．用 Ω 表示．

（3）不可能事件：在一定条件下肯定不会发生的事件．用 $\varnothing$ 表示．

2．事件 A 的概率

在大量重复进行同一试验时，事件 A 出现的次数称为频数，频数与试验总次数的比称为频率．若随机事件 A 发生的频率在总体上稳定在某个常数，这时就把这个常数叫做随机事件 A 的概率，记为 $P(A)$．

3．概率的基本性质

（1）$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$ ．

（2）对于任一事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$．

4．互斥事件及其加法公式

（1）互斥事件：在一次试验中不可能同时发生的两个事件．

（2）“$A\cup B$”的含义：两个事件 A、B 中至少有一个发生．$P(A\cup B)$ 表示事件 A 或 B 至少有一个发生的概率．

（3）互斥事件的加法公式：若 A，B 是互斥事件，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$．

推广：若 A_1，A_2，…，A_n 彼此互斥（任何两个都互斥），则

$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

5．对立事件及反概率公式

（1）对立事件：在一次试验中，其中必有一个发生的两个互斥事件叫做对立事件．事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，$A \cup \overline{A} = \Omega$．

（2）互斥事件与对立事件的关系

对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件；只有两个互斥事件 A 和 B 满足 $A \cup B = \Omega$ 时，A 和 B 才是对立事件．

（3）反概率公式：$P(A) = 1 - P(\overline{A})$．

6．古典概型及其概率公式

（1）古典概型：如果一个随机试验可能出现的结果只有有限个，即基本事件总数是有限的，并且每个基本事件发生的可能性相同，那么称这样的随机试验为古典概型试验，简称古典概型．

（2）古典概型的概率公式：在古典概型中，如果基本事件的总数为 n，那么每个基本事件发生的概率都是 $\frac{1}{n}$；如果某个事件 A 包含了其中 m 个基本事件，则事件 A 发生的概率为 $P(A) = \frac{m}{n}$．

7．几何概型及其概率公式

（1）几何概型：对于一个随机试验，我们将基本事件理解为从某个可度量的几何区域 G 内随机地取一点，该区域中每一个点被取到的机会都一样；而一个随机事件的发生则理解为恰好取到上述区域内的某个指定区域 g 中的点，则称这个随机试验为几何概型随机试验，简称几何概型．

（2）几何概型的概率公式：在几何区域 G 中随机地取一点，记事件 A 为“该点落在其内部一个区域 g 内”，则事件 A 发生的概率为 $P(A) = \frac{g\text{的度量}}{G\text{的度量}}$．

注意： G 的度量不为 0；当 G 分别是线段、平面区域和立体图形时，相应的“度量”分别是长度、面积和体积．

【方法导引】

【例 6-2-1】（1）在 0，1，2，3，…，9 这十个数字中，任取四个不同的数字，那么“这四个数字之和大于 5”这一事件是（　　）

A．必然事件　　B．不可能事件　　C．随机事件　　D．不确定是何事件

（2）从 20 名男同学，10 名女同学中任选 3 名参加体能测试，则选到的 3 名同学中既有男同学又有女同学的概率为（　　）

A．$\frac{9}{29}$　　B．$\frac{10}{29}$　　C．$\frac{19}{29}$　　D．$\frac{20}{29}$

【解】（1）选 A；

（2）$P = \frac{C_{20}^1 C_{10}^2 + C_{20}^2 C_{10}^1}{C_{30}^3} = \frac{20}{29}$，选 D．

【例 6-2-2】 如图 6-2-1 所示，在边长为 25cm 的正方形中挖去边长为 23cm 的两个等腰直角三角形，现有均匀的粒子散落在正方形中，问粒子落在中间带形区域的概率是多少？

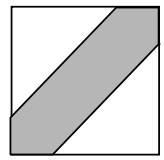


图 6-2-1

【解】因为均匀的粒子落在正方形内任何一点是等可能的，所以符合几何概型的条件。

设 A＝“粒子落在中间带形区域”则依题意得

正方形面积为：25×25＝625

两个等腰直角三角形的面积为：$2\times\frac{1}{2}\times23\times23=529$

带形区域的面积为：625 – 529＝96

$\therefore P(A)=\frac{96}{625}$.

【例 6-2-3 】 袋中有大小相同的 5 个球，其中黑球 3 个，白球 2 个，甲乙二人分别从中各取一个，甲先取（不放回）乙后取．规定：两人取到同颜色的球，甲胜，取到不同颜色的球，则乙胜．（1）分别求甲乙取到黑球的概率；（2）甲乙二人谁胜的概率大，请说明理由。

【解】（1）记“甲取到黑球”为事件 A，“乙取到黑球”为事件 B”

则 $P(A)=\frac{C_3^1}{C_5^1}=\frac{3}{5}$，$P(B)=\frac{C_3^1C_2^1+C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，故甲、乙取到黑球的概率均为 $\frac{3}{5}$.

（2）记“两人取到同色球”为事件 D，“两人取到异色的球”为事件 E

则 $P(D)=\frac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\frac{2}{5}$，$P(E)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$

因为 $P(D)<P(E)$，所以乙胜出的概率大.

【例 6-2-4】 已知集合 $A=\{-8,-6,-4,-2,0,1,3,5,7\}$，在平面直角坐标系中，点 M 坐标为（x，y），若 $x\in A$，$y\in A$，且 $x\neq y$，计算：

（1）点 M 正好在第二象限的概率；

（2）点 M 不在 x 轴上的概率.

【解】（1）由题意知　$x<0$ 且 $y>0$，$P_1=\frac{A_4^1A_4^1}{A_9^2}=\frac{2}{9}$；

（2）由题意知　$y\neq0$，$P_2=1-\frac{A_8^1A_1^1}{A_9^2}=\frac{8}{9}$

$\therefore$点（x，y）正好在第二象限的概率是 $\frac{2}{9}$；点（x，y）不在 x 轴上的概率是 $\frac{8}{9}$.

【例 6-2-5】（1）设函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2(a-1)x+b^2}$ 的定义域为 D，其中 $a\in\{1,2,3,4\}$，$b\in\{1,2,3\}$，求使 $D=\mathbf{R}$ 的概率；

（2）将一颗骰子抛掷两次．若记第一次、第二次得到向上的点数分别为 a、b，则直线 $(a+1)x-by-7=0$ 的倾斜角大于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为　（　　）

A．$\frac{7}{12}$　　B．$\frac{17}{36}$　　C．$\frac{19}{36}$　　D．$\frac{5}{12}$

【解】（1）因为 $a\in\{1,2,3,4\}$，$b\in\{1,2,3\}$，所以（a，b）的所有可能情况共计 4×3=12 种。

而由 $D=\mathbf{R}$，有 $4(a-1)^2-4b^2\leqslant 0\Rightarrow|a-1|\leqslant|b|$，

那么满足 $D=\mathbf{R}$ 的（a，b）的所有可能为：（1，1），（1，2），（1，3），（2，1），（2，2），（2，3），（3，2），（3，3），（4，3）共计 9 种，所以其概率 $P=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$.

（2）由题意知 $\tan\alpha=k=\dfrac{a+1}{b}>1$，$a+1>b$，$a>b-1$，

当 $a=1$ 时，b 可取 1；当 $a=2$ 时，b 可取 1，2；当 $a=3$ 时，b 可取 1，2，3；

当 $a=4$ 时，b 可取 1，2，3，4；当 $a=5$ 时，b 可取 1，2，3，4，5；

当 $a=6$ 时，b 可取 1，2，3，4，5，6；

所以 $P=\dfrac{1+2+3+4+5+6}{36}=\dfrac{21}{36}=\dfrac{7}{12}$，故选 A.

【实战演练】

一、达标检测

1．从装有两个红球和两个黑球的口袋内任取两个球，那么互斥而不对立的两个事件是（　　）

A．“至少有一个黑球”与“都是黑球”

B．“至少有一个黑球”与“至少有一个红球”

C．“恰有一个黑球”与“恰有两个黑球”

D．“至少有一个黑球”与“都是红球”

2．6 名同学排成两排，每排 3 人，其中甲排在前排的概率是（　　）

A．$\dfrac{1}{12}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{6}$　　D．$\dfrac{1}{3}$

3．有 10 名学生，其中 4 名男生，6 名女生，从中任选 2 名，恰好 2 名男生或 2 名女生的概率是（　　）

A．$\dfrac{2}{45}$　　B．$\dfrac{2}{15}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{7}{15}$

4．已知集合 $A=\{12,14,16,18,20\}$，$B=\{11,13,15,17,19\}$，在 A 中任取一个元素用 a 表示，在 B 中任取一个元素用 b 表示，则所取两数满足 $a>b$ 的概率为（　　）

A．$a+b$　　B．$a+b$　　C．$a+b$　　D．$a+b$

5．把一颗骰子抛掷 2 次，观察出现的点数，并记第一次出现的点数为 a，第二次出现的点数为 b，则 $a+b$ 能被 3 整除的概率为（　　）

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{7}{36}$　　D．$\dfrac{5}{18}$

6．现有 7 名世博会志愿者，其中志愿者 A_1，A_2，A_3 通晓日语，B_1，B_2 通晓俄语，C_1，C_2 通晓韩语．从中选出通晓日语、俄语和韩语的志愿者各 1 名，组成一个小组．已知每个志愿者被选中的机会均等．则 B_1 和 C_1 至少有一人被选中的概率为（　　）

A．$\dfrac{3}{4}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{7}{12}$　　D．$\dfrac{5}{12}$

7．若有 2 位老师，2 位学生站成一排合影，则“每位老师都不站在两端”的对立事件的

概率是_____.

8．若以连续抛掷两次骰子分别得到的点数 m，n 作为点 Q 的坐标，则点 Q 落在圆 $x^2+y^2=16$ 内的概率为_____.

9．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(x,y)$．若 x，y 分别表示将一枚质地均匀的正方体骰子先后抛掷两次时第一次、第二次出现的点数，则满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$ 的概率是_____.

10．从 6 人中选 4 人分别到巴黎，伦敦，悉尼，莫斯科四个城市游览，要求每个城市有一人游览，每人只游览一个城市，且这 6 人中甲，乙两人不去巴黎游览的概率为_____（用分数表示）.

11．袋中有大小相同的 5 个白球和 3 个黑球，从中任意摸出 4 个，求下列事件发生的概率．（1）摸出 2 个或 3 个白球；（2）至少摸出一个黑球.

12．已知关于 x 的一元二次函数 $f(x)=ax^2-4bx+1$. 设集合 $A=\{1,2,3\}$ 和 $B=\{1,2,3,4\}$，分别从集合 A 和 B 中随机取一个数作为 a 和 b，求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是增函数的概率.

二、直击高考

1．（2012 年单招试题）设甲将一颗骰子抛掷一次，所得向上的点数为 a，则方程 $x^2+ax+1=0$ 有两个不相等实根的概率为（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{5}{12}$

2．（2009 年单招试题）如果从集合 $\{0,1,2,3\}$ 中任取 3 个数作为直线方程 $Ax+By+C=0$ 中的系数 A，B，C，则所得直线恰好过坐标原点的概率为_____.

3．（2007 年单招试题）一袋子中有 3 个红球和 2 个白球，甲乙两人分别从中任取一个球（取后不放回）；如果甲先取而乙后取，试求：

（1）甲取到白球且乙取到红球的概率.

（2）甲取到红球且乙取到红球的概率.

（3）甲乙两个人谁取得的红球的概率大，请说明理由.

【提炼反思】

1．古典概型必须满足两点：

（1）对于每个随机试验来说，所有可能出现的试验结果数 n 必须是有限个；

（2）出现的所有不同的试验结果数 m 其可能性大小必须是相同的．

只有在同时满足（1）、（2）的条件下，运用的古典概型计算公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 得出的结果才是正确的．这里，确定 m 、 n 的数值是关键所在，必须做到不重复不遗漏．

2．对立事件是互斥事件的一种特殊情况，对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件．

第3讲 统 计

【夯实基础】

1．总体和样本

在统计中，把所考察的对象的某一项指标值的全体称为总体，构成总体的每一个指标值称为个体；从总体中抽出若干个体所组成的集合叫做样本，样本包含的个体数量叫做样本容量．

2．样本的抽样方法

类 别	共同点	各自特点	相互联系	适用范围
简单随机抽样	抽样过程中每个个体被抽取的概率相等	从总体中逐个抽取		总体中的个体数较少
系统抽样		将总体均分成几部分，按事先确定的规则在各部分抽取	在起始部分抽样时采用简单随机抽样	总体中的个体数较多
分层抽样		将总体分成几层，分层进行抽取	各层抽样时采用简单随机抽样或系统抽样	总体由差异明显的几部分组成

3．总体分布估计

（1）基本思想

用样本的频率分布，作为对总体分布的一个估计，用样本的平均值和方差作为总体平均值和方差的估计．

（2）方法

先对样本数据进行整理和分析，然后根据整理和分析的结果估计总体．整理和分析的内容和步骤如下表：

内 容		方法、步骤和计算公式
整理样本数据	整理要求	将样本数据整理成频率分布表和频率分布直方图
	整理步骤	求极差→确定组距和组数→确定组分点→统计各组的频数、频率→制作频率分布表→作频率直方图

续表

内　容		方法、步骤和计算公式
分析样本数据	分析内容	求平均值、方差
	分析方法	平均值 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$；方差 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$；标准差 $s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

（3）方差和标准差反映数据关于平均值的集中程度，方差和标准差越小，表明各个个体就越接近平均值，就越稳定.

4．一元线性回归

（1）相关关系

变量之间的关系有确定性关系和非确定性关系，变量之间的非确定性关系，称为相关关系，或称回归关系.

（2）回归分析

对具有相关关系的两个变量进行统计分析的方法称为回归分析；其中最简单、最常用的就是只含有两个变量的一元线性回归.

（3）回归直线

用直线方程 $\hat{y}=bx+a$ 近似表示的相关关系叫做线性关系，这条直线称为回归直线，其中 a，b 称为回归系数，且 $\begin{cases} b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2} \\ a=\bar{y}-b\bar{x} \end{cases}$.

【方法导引】

【例 6-3-1】　（1）假设关于某设备的使用年限 x 和所支出的维修费 y（万元）有如下的统计资料：

使用年限 x	2	3	4	5	6
维修费用 y	2.2	3.8	5.5	6.5	7.0

由资料可知 y 和 x 呈线性相关关系，由表中数据算出线性回归方程 $\hat{y}=bx+a$ 中的 $b=1.23$，据此估计，使用年限为 10 年时的维修费用是_____万元.

（2）某单位青年、中年、老年职员的人数之比为 $11:8:6$，从中抽取 200 名职员作为样本，则应抽取青年职员的人数为_____.

（3）某班级有 50 名学生，现要采取系统抽样的方法在这 50 名学生中抽出 10 名学生，将这 50 名学生随机编号为 1～50 号，并分组，第一组 1～5 号，第二组 6～10 号，……，第十组 46～50 号，若在第三组中抽得号码为 12 的学生，则在第八组中抽得号码为_____的学生.

【解】（1）由题意知 $\bar{x}=4$，$\bar{y}=5$，即回归直线过点（4，5），代入回归直线得 $a=0.08$，

即回归直线方程为 $\hat{y}=1.23x+0.08$，

所以当 $x=10$ 时，$\hat{y}=1.23\times10+0.08=12.38$（万元）.

（2）青年所占人数比为 $\frac{11}{11+8+6}=\frac{11}{25}$，所以抽取青年职员的人数为 $200\times\frac{11}{25}=88$.

（3）因为 $12=5\times2+2$，即第三组抽出的是第二个同学，所以每一组都相应抽出第二个同学. 所以第 8 组中抽出的号码为 $5\times7+2=37$ 号.

【例 6-3-2】 某企业员工 500 人参加“学雷锋”志愿活动，按年龄分组：第 1 组[25，30），第 2 组[30，35），第 3 组[35，40），第 4 组[40，45），第 5 组[45，50]，得到的频率分布直方图如图 6-3-1 所示.

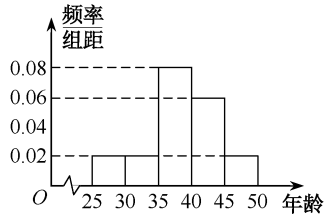


图 6-3-1

（1）下表是年龄的频数分布表，求正整数 a，b 的值；

区　间	[25，30）	[30，35）	[35，40）	[40，45）	[45，50]
人　数	50	50	a	150	b

（2）现在要从年龄较小的第 1，2，3 组中用分层抽样的方法抽取 6 人，年龄在第 1，2，3 组的人数分别是多少？

（3）在（2）的前提下，从这 6 人中随机抽取 2 人参加社区宣传交流活动，求至少有 1 人年龄在第 3 组的概率.

【解】（1）由题设可知，$a=0.08\times5\times500=200$，$b=0.02\times5\times500=50$.

（2）因为第 1，2，3 组共有 $50+50+200=300$ 人，

利用分层抽样在 300 名员工中抽取 6 名，每组抽取的人数分别为：

第 1 组的人数为 $6\times\frac{50}{300}=1$，

第 2 组的人数为 $6\times\frac{50}{300}=1$，

第 3 组的人数为 $6\times\frac{200}{300}=4$，

所以第 1，2，3 组分别抽取 1 人，1 人，4 人.

（3）设至少有 1 人年龄在第 3 组为事件 A，则

所以至少有 1 人年龄在第 3 组的概率为 $P(A)=1-\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{14}{15}$.

【例 6-3-3】 为了分析某个高三学生的学习状态，对其下一阶段的学习提供指导性建议. 现对他前 7 次考试的数学成绩 x、物理成绩 y 进行分析. 下面是该生 7 次考试的成绩.

数　学	88	83	117	92	108	100	112
物　理	94	91	108	96	104	101	106

他的数学成绩与物理成绩哪个更稳定？请给出你的证明；

【解】 $\bar{x}=100+\frac{-12-17+17-8+8+12}{7}=100$

$\bar{y}=100+\frac{-6-9+8-4+4+1+6}{7}=100$

$\therefore s^2_{数学}=\dfrac{994}{7}=142$ ，$s^2_{物理}=\dfrac{250}{7}$

$s^2_{数学}>s^2_{物理}$，所以物理成绩更稳定.

【例 6-3-4】 为了解某居民小区住户的年收入和年饮食支出的关系，抽取了其中 5 户家庭的调查数据如下表（单位：万元）：

年收入 x	3	4	5	6	7
年饮食支出 y	1	1.3	1.5	2	2.2

（1）根据表中数据用最小二乘法求得回归直线方程 $\hat{y}=bx+a$ 中的 $b=0.31$，请预测年收入为 9 万元家庭的年饮食支出；

（2）从 5 户家庭中任选 2 户，求“恰有一户家庭年饮食支出小于 1.6 万元”的概率.

【解】（1）$\bar{x}=\dfrac{3+4+5+6+7}{5}=5$，$\bar{y}=\dfrac{1+1.3+1.5+2+2.2}{5}=1.6$

又 $b=0.31$，代入 $\bar{y}=b\bar{x}+a\Rightarrow a=0.05$

$\therefore \hat{y}=0.31x+0.05$，当 $x=9$ 时，解得 $\hat{y}=2.84$（万元）.

∴年收入为 9 万元家庭的年饮食支出约为 2.84 万元.

（2）记“年饮食支出小于 1.6 万元”的家庭有 3 家；“年饮食支出不小于 1.6 万元”的家庭有 2 家

设“从5户家庭中任选2户，恰有一户家庭年饮食支出小于1.6万元”为事件 A.

$P(A)=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{3}{5}=0.6$

答：从 5 户家庭中任选 2 户恰有一户家庭年饮食支出小于 1.6 万元的概率是 0.6.

【实战演练】

一、达标检测

1．在 1000 个有机会中奖的号码（编号为 000～999）中，在公证部门的监督下按照随机抽取的方法确定后两位数为 98 的号码为中奖号码，该抽样运用的抽样方法是　　（　　）

A．简单随机抽样　B．系统抽样　　C．分层抽样　　D．以上均不对

2．某工厂甲、乙、丙三个车间生产了同一种产品，数量分别为 120 件，80 件，60 件．为了解它们的产品质量是否存在显著差异，用分层抽样方法抽取了一个容量为 n 的样本进行调查，其中从丙车间的产品中抽取了 3 件，则 $n=$　　（　　）

A．9　　B．10　　C．12　　D．13

3．总体由编号为 01，02，…，19，20 的 20 个个体组成．利用下面的随机数表选取 5 个个体，选取方法是从随机数表第 1 行的第 5 列数字开始由左到右依次选取两个数字，则选出来的第 5 个个体的编号为　　（　　）

7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9234	4935	8200	3623	4869	6938	7481

A．08　　B．07　　C．02　　D．01

4．对具有线性相关关系的变量 x，y，测得一组数据如下表：

x	2	4	5	6	8
y	20	40	60	70	80

根据上表，利用最小二乘法得到它们的回归直线方程为 $\overline{y}=10.5x+\overline{a}$，据此模型来预测当 $x=20$ 时，y 的估计值为（　　）

A．210　　B．210.5　　C．211.5　　D．212.5

5．对于一组数据 x_i（$i=1$，2，3，…，n），如果将它们改变为 x_i+c（$i=1$，2，3，…，n），其中 $c\neq 0$，则下面结论中正确的是（　　）

A．平均数与方差均不变　　B．平均数变了，而方差保持不变

C．平均数不变，而方差变了　　D．平均数与方差均发生了变化

6．如图 6-3-2 是某班 50 位学生期中考试数学成绩的频率分布直方图，其中成绩分组区间是：[40，50)，[50，60)，[60，70)，[70，80)，[80，90)，[9，100)，则图中 x 的值等于（　　）

A．0.754　　B．0.048

C．0.018　　D．0.012

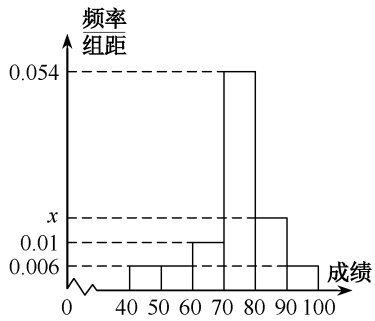


图 6-3-2

7．已知变量 x，y 具有线性相关关系，测得（x，y）的一组数据如下：(0，1)，(1，2)，(2，4)，　(3，5)，其回归方程为 $\hat{y}=1.4x+a$，则 a 的值是_____.

8．某学校高一年级男生人数占该年级学生人数的 40%．在一次考试中，男、女生平均分数分别为 75、80，则这次考试该年级学生平均分数为_____.

9．某学员在一次射击测试中射靶 10 次，命中环数如下：7，8，7，9，5，4，9，10，7，4，则命中环数的标准差为_____.

10．某学校三个兴趣小组的学生人数分布如下表（每名同学只参加一个小组）（单位：人）：

	篮球组	书画组	乐器组
高一	45	30	a
高二	15	10	20

学校要对这三个小组的活动效果进行抽样调查，按小组分层抽样的方法，从参加这三个兴趣小组的学生中抽取 30 人，结果篮球组被抽出 12 人，则 a 的值为_____.

11．调查某初中 1000 名学生的肥胖情况，得下表：

	偏瘦	正常	肥胖
女生（人）	100	173	y
男生（人）	x	177	z

已知从这批学生中随机抽取 1 名学生，抽到偏瘦男生的概率为 0.15.

（1）求 x 的值；

（2）若用分层抽样的方法，从这批学生中随机抽取 50 名，问应在肥胖学生中抽多少名？

（3）已知 $y \geqslant 193$，$z \geqslant 193$，求肥胖学生中男生不少于女生的概率.

12．为了考察甲、乙两种小麦的长势，分别从中抽取 10 株苗，测得苗高如下：

甲	12	13	14	15	10	16	13	11	15	11
乙	11	16	17	14	13	19	6	8	10	16

问：哪种小麦长得比较整齐？

二、直击高考

1．（2010 年单招试题）已知数据 a_1，a_2，a_3 的方差为 2，则数据 $2a_1$，$2a_2$，$2a_3$ 的方差为（　　）

A．2　　B．4　　C．8　　D．10

2．（2011 年单招试题）一工厂生产某种产品 240 件，它们来自甲、乙、丙三条生产线．为检查这批产品的质量，决定采用分层抽样的方法进行抽样，已知从甲、乙、丙三条生产线抽取的个体数组成一个等差数列，则乙生产线生产的产品件数为（　　）

A．40　　B．80　　C．120　　D．160

3．（2013 年单招试题）在二项式 $(2x^3-\frac{1}{\sqrt{x}})^7$ 的展开式中，常数项等于（　　）

A．-42　　B．42　　C．-14　　D．14

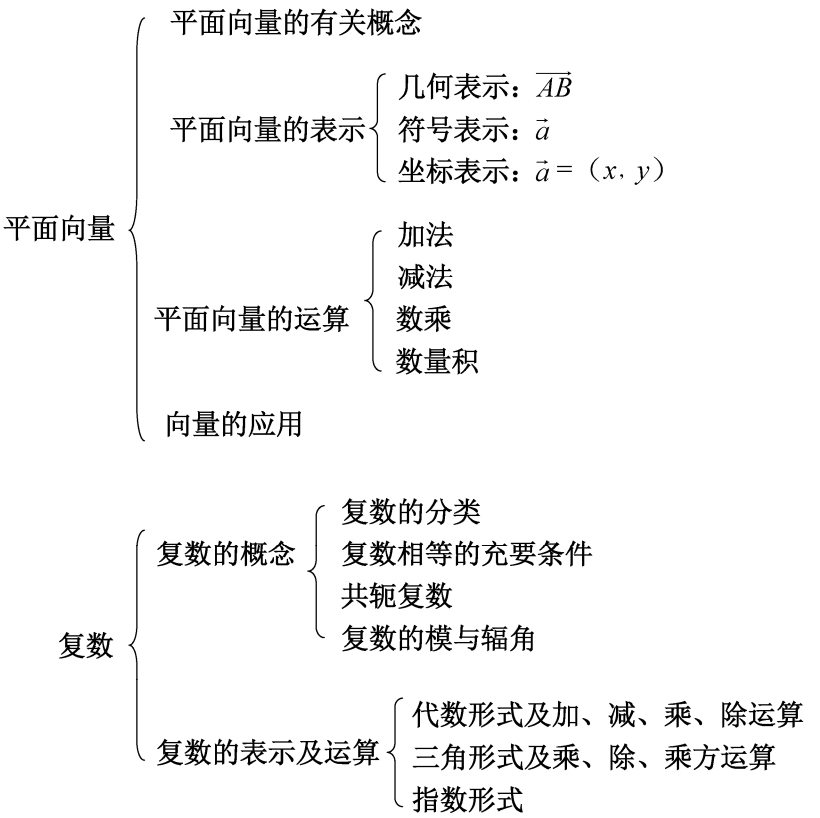
【提炼反思】

1．总体分布估计常与频率分布直方图结合在一起考核，频率分布直方图中，横轴分成若干个等长的线段，也就是每一个矩形的底，它的长就是组距；每一个矩形的高就等于该组的 $\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$；从而每一个矩形的面积也就是样本数据在该组上的频率．频率分布直方图可以直观地反映样本的频率分布规律，并可以借助于样本的频率分布估计总体的概率分布．

2．样本的方差反映了数据关于平均值的集中程度，方差越小，表明各个个体就越接近平均值，产品性能就越稳定，质量就越好．

专题七　平面向量及复数

【思维导航】



【考点梳理】

考　　点	要　　求
平面向量的概念	了解
平面向量的加法、减法和数乘运算	理解
平面向量的坐标表示	了解
平面向量的内积	了解
复数的概念	了解
复数的代数运算	理解
复数的几何意义及三角形	了解
棣莫弗定理及欧拉公式	了解

第 1 讲　向量的概念与线性运算

【夯实基础】

1．向量的概念：既有大小又有方向的量．向量一般用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，……来表示；或用有向线段的起点与终点的大写字母表示，如 $\overrightarrow{AB}$；坐标表示法 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}=(x,\ y)$．向量的大小即向量的模（长度），记作 $|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|$．

向量不能比较大小，但向量的模可以比较大小．

★判断下列命题是否正确，不正确的说明理由．

（1）若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向，且 $|\vec{a}|>|\vec{b}|$，则 $\vec{a}>\vec{b}$；

（2）若向量 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的长度相等且方向相同或相反；

（3）若向量 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同，则 $\vec{a}=\vec{b}$．

2．零向量：长度为 0 的向量，记为 $\vec{0}$，其方向是任意的，$\vec{0}$ 与任意向量平行；向量 $\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow|\vec{a}|=0$．由于 $\vec{0}$ 的方向是任意的，且规定 $\vec{0}$ 平行于任何向量，故在有关向量平行（共线）的问题中务必看清楚是否有“非零向量”这个条件．（注意与 0 的区别）

★判断：若 $\vec{a}//\vec{b}$，$\vec{b}//\vec{c}$，则 $\vec{a}//\vec{c}$．（　　）

3．相等向量：长度相等且方向相同的向量，相等向量经过平移后总可以重合，记为 $\vec{a}=\vec{b}$．

★如图 7-1-1 所示，设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，在图中所标出的向量中：与 $\overrightarrow{EF}$ 相等的向量有哪几个？

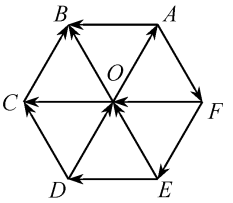


图 7-1-1

4．平行向量（共线向量）：方向相同或相反的非零向量，记作 $\vec{a}//\vec{b}$．由于向量可以进行任意的平移（即自由向量），平行向量总可以平移到同一直线上，故平行向量也称为共线向量．

★给出下列命题：

①若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则 $\vec{a}=\vec{b}$；

②若 A，B，C，D 是不共线的四点，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ 是四边形 $ABCD$ 为平行四边形的充要条件；

③若 $\vec{a}=\vec{b}$，$\vec{b}=\vec{c}$，则 $\vec{a}=\vec{c}$；

④$\vec{a}=\vec{b}$ 的充要条件是 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ 且 $\vec{a}//\vec{b}$．其中正确的序号是_____．

5．单位向量：模为 1 个单位长度的向量；向量 $\vec{e}$ 为单位向量 $\Leftrightarrow|\vec{e}|=1$．

★与 $\vec{a}$ 共线的单位向量是_____．

6．向量的运算：

（1）向量加法：求两个向量和的运算叫做向量的加法.

设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，则 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

规定：①$\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$；②向量加法满足交换律与结合律.

（2）向量的减法：

①相反向量：与 $\vec{a}$ 长度相等、方向相反的向量，叫做 $\vec{a}$ 的相反向量，记作 $-\vec{a}$.

零向量的相反向量仍是零向量. 关于相反向量有：（i）$-(-\vec{a})=\vec{a}$；（ii）$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$；（iii）若 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是互为相反向量，则 $\vec{a}=-\vec{b}$，$\vec{b}=-\vec{a}$，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

②向量减法：向量 $\vec{a}$ 加上 $\vec{b}$ 的相反向量叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差，记作：$\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$.

求两个向量差的运算，叫做向量的减法.

（3）向量加法和减法的“三角形法则”与“平行四边形法则”：

①用平行四边形法则时，两个已知向量要共起点，和向量是起点与已知向量的起点重合的那条对角线，而差向量是另一条对角线，方向是从减向量指向被减向量.

②用三角形法则时，加法：“首尾连接”，由第一个向量的起点指向最后一个向量的终点的有向线段就表示这些向量的和；减法：“共起点”，差向量是从减向量的终点指向被减向量的终点.

③向量加法的三角形法则可推广至多个向量相加：

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\cdots+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{AR}$，但这时必须“首尾相连”.

★设 A、B、C、D、O 是平面上的任意五点，试化简：

① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}$；　　② $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

7．$|\vec{a}|-|\vec{b}|\leqslant|\vec{a}\pm\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

★关于非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，有下列四个命题：

①“$|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$”的充要条件是“$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的方向相同”；

②“$|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$”的充要条件是“$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的方向相反”；

③“$|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$”的充要条件是“$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 有相等的模”；

④“$|\vec{a}|-|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$”的充要条件是“$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的方向相同”.

其中真命题的个数是_____.

8．两个向量共线定理：

向量 $\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 有且只有一个实数 λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

①实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量，记作 $\lambda\vec{a}$，它的长度与方向规定如下：

（i）$|\overrightarrow{\lambda a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$；

（ii）当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$，方向是任意的.

②数乘向量满足交换律、结合律与分配律.

★设$\vec{x}$为未知向量，$\vec{a}$、$\vec{b}$为已知向量，解方程$2\vec{x}-(5\vec{a}+3\vec{x}-4\vec{b})+\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}=\vec{0}$.

【方法导引】

【例 7-1-1】 $\vec{a}$，$\vec{b}$是任意向量，给出：①$\vec{a}=\vec{b}$；②$|\vec{a}|=|\vec{b}|$；③$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相反；④$\vec{a}=\vec{0}$或$\vec{b}=\vec{0}$；⑤$\vec{a}$，$\vec{b}$都是单位向量．其中_____是$\vec{a}$与$\vec{b}$共线的充分不必要条件．

【解】①$\vec{a}=\vec{b}\Rightarrow\vec{a}$与$\vec{b}$共线，但$\vec{a}$与$\vec{b}$共线$\not\Rightarrow\vec{a}=\vec{b}$；

②$|\vec{a}|=|\vec{b}|\not\Rightarrow\vec{a}$与$\vec{b}$共线，$\vec{a}$与$\vec{b}$共线$\not\Rightarrow|\vec{a}|=|\vec{b}|$；

③$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相反$\Rightarrow\vec{a}$与$\vec{b}$共线，$\vec{a}$与$\vec{b}$共线$\not\Rightarrow\vec{a}$与$\vec{b}$方向相反；

④$\vec{a}=\vec{0}$或$\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}$与$\vec{b}$共线，$\vec{a}$与$\vec{b}$共线$\not\Rightarrow\vec{a}=\vec{0}$或$\vec{b}=\vec{0}$；

⑤$\vec{a}$，$\vec{b}$都是单位向量$\not\Rightarrow\vec{a}$与$\vec{b}$共线，$\vec{a}$与$\vec{b}$共线$\not\Rightarrow\vec{a}$，$\vec{b}$都是单位向量．

所以是①，③，④．

【例 7-1-2】 计算：

（1）$4(2\vec{a}-3\vec{b})+3(3\vec{a}+\vec{b})$；　　（2）$-3(\vec{a}-2\vec{b})+4(2\vec{a}+2\vec{b}-6\vec{c})$.

【解】（1）原式$=8\vec{a}-12\vec{b}+9\vec{a}+3\vec{b}=17\vec{a}-9\vec{b}$

（2）原式$=-3\vec{a}+6\vec{b}+8\vec{a}+8\vec{b}-24\vec{c}=5\vec{a}+14\vec{b}-24\vec{c}$

【例 7-1-3】 已知两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线．

（1）若$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=2\vec{a}+8\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\vec{a}-\vec{b})$，求证：$A$，$B$，$D$三点共线；

（2）试确定实数k，使$k\vec{a}+\vec{b}$和$\vec{a}+k\vec{b}$共线．

【解】（1）$\because\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=2\vec{a}+8\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\vec{a}-\vec{b})$，

$\therefore\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\vec{a}+8\vec{b}+3(\vec{a}-\vec{b})=5(\vec{a}+\vec{b})=5\overrightarrow{AB}$，

$\therefore\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BD}$共线，所以$A$，$B$，$D$三点共线．

（2）$\because k\vec{a}+\vec{b}$和$\vec{a}+k\vec{b}$共线，$\therefore$存在实数$\lambda$，使$k\vec{a}+\vec{b}=\lambda(\vec{a}+k\vec{b})$

即$k\vec{a}+\vec{b}=\lambda\vec{a}+\lambda k\vec{b}$，又$\because\vec{a}$、$\vec{b}$是两个不共线非零向量，

$\therefore\begin{cases}\lambda=k\\ \lambda k=1\end{cases}$，$\therefore k^2=1$，$k=\pm1$，

经检验，$k=\pm1$均符合题意．

【例 7-1-4】 如图 7-1-2 所示，已知正六边形$ABCDEF$，O是它的中心，若$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，试用$\vec{a}$，$\vec{b}$将向量$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{FD}$表示出来．

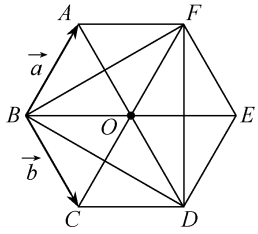


图 7-1-2

【解】由图知：$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OF}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}=2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{b}+\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BF}=(\vec{a}+2\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}+\vec{b}$

【实战演练】

二、达标检测

1．若$\vec{a}$，$\vec{b}$为非零向量，且$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$，则有（　　）

A．$\vec{a}$，$\vec{b}$方向相同　　B．$\vec{a}=\vec{b}$

C．$\vec{a}=-\vec{b}$　　D．以上都不对

2．下列算式正确的是（　　）

A．$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=0$　　B．$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

C．$0\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$　　D．$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$

3．在△ABC中，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，若点$D$满足$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AD}=$（　　）

A．$\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　　B．$\frac{5}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{b}$　　C．$\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$　　D．$\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

4．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，$\vec{c}=k\vec{a}+\vec{b}(k\in\mathbf{R})$，$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$，如果$\vec{c}//\vec{d}$，那么（　　）

A．$k=1$且$\vec{c}$与$\vec{d}$同向　　B．$k=1$且$\vec{c}$与$\vec{d}$反向

C．$k=-1$且$\vec{c}$与$\vec{d}$同向　　D．$k=-1$且$\vec{c}$与$\vec{d}$反向

5．设P是△ABC所在平面内的一点，$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$，则（　　）

A．$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$　　B．$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\vec{0}$

C．$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$　　D．$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

6．化简$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})=$_____.

7．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=k\vec{a}+3\vec{b}$，若$A$，$B$，$C$三点共线，则$k=$_____

8．如图 7-1-3 所示，在△ABC中，已知$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$，用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\overrightarrow{AD}$，则$\overrightarrow{AD}=$_____.

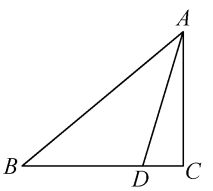


图 7-1-3

【提炼反思】

1．向量加法应注意的几个问题

（1）两个向量的和仍是一个向量；

（2）使用三角形法则时要注意“首尾相连”；

（3）当两个向量共线时，三角形法则适用，而平行四边形法则不适用；

（4）向量求和的多边形法则：已知n个向量，依次把这n个向量“首尾相连”，以第一个向量的起点为起点，第n个向量的终点为终点的向量，叫做这n个向量的和向量.

2．向量减法运算应注意的两个问题

（1）向量的减法实质是加法的逆运算，差仍为一个向量；

（2）用三角形法则作向量减法时，记住“连接两个向量的终点，箭头指向被减向量”.

3．向量的数乘运算

（1）向量数乘的特殊情况：当$\lambda=0$时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$；当$\vec{a}=\vec{0}$时，也有$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

（2）实数和向量可以求积，但不能求和、求差.

（3）熟练掌握向量线性运算的运算规律是正确化简向量算式的关键，要正确区分向量数

量积与向量数乘的运算.

第2讲　平面向量的坐标运算与数量积

【夯实基础】

1．平面向量的坐标表示

（1）平面向量的坐标表示：在平面直角坐标系中，分别取与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$ 作为基底．该平面内的任一向量 $\vec{a}$ 可表示成 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$，由于向量 $\vec{a}$ 与有序数对（x，y）是一一对应的，因此把（x，y）叫做向量 $\vec{a}$ 的坐标．记作 $\vec{a}=(x,y)$，其中 x 叫做向量 $\vec{a}$ 的横坐标，y 叫做向量 $\vec{a}$ 的纵坐标．向量 $\vec{a}$ 的模为 $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$．

（2）相等的向量坐标相同，坐标相同的向量是相等的向量；

（3）向量的坐标与表示该向量的有向线段的始点、终点的具体位置无关，只与其相对位置有关，设起点 $A(x_1,y_1)$，终点 $B(x_2,y_2)$，则向量 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模为 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$．

★已知点 $A(2,3)$，$B(5,7)$，则 $|\overrightarrow{AB}|=$ _____.

2．平面向量的坐标运算

① 若 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$；

② $\vec{a}=(x,y)$，则 $\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y)$．

★已知三个力 $\overrightarrow{F_1}=(3,4)$，$\overrightarrow{F_2}=(2,-5)$，$\overrightarrow{F_3}=(x,y)$ 的合力 $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$，求 $\overrightarrow{F_3}$ 的坐标．

3．若 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\parallel\vec{b}$（$\vec{b}\neq\vec{0}$）的充要条件是 $x_1y_2-x_2y_1=0$．

★已知 $A(-1,-1)$，$B(1,3)$，$C(1,5)$，$D(2,7)$，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 平行吗？直线 AC 平行于直线 AB 吗？

4．两个非零向量的夹角

已知非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则 $\angle AOB=\theta$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记作 $\theta=<\vec{a},\vec{b}>$，我们规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$．

说明：（1）当 $\theta=0$ 时，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向；

（2）当$\theta=\pi$时，$\vec{a}$与$\vec{b}$反向；

（3）当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，记作$\vec{a}\perp\vec{b}$；

（4）注意在两向量的夹角定义中，两向量必须共起点，范围$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

★在等边△ABC中，$<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}>=$_____.

5．数量积的概念

已知两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，它们的夹角为θ，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积（或内积）．规定$\vec{0}\cdot\vec{a}=0$.

★在△ABC中，$|\overrightarrow{BC}|=3$，$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=5$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=$_____.

6．向量的投影：$|\vec{b}|\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\in\mathbf{R}$，称为向量$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影．投影的绝对值称为射影.

★若向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为60°，则向量$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影是_____.

7．数量积的几何意义：$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于$\vec{a}$的长度与$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影的乘积.

★如图7-2-1所示，已知正六边形$P_1P_2P_3P_4P_5P_6$，下列向量的数量积中最大的是（　　）

A．$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3}$　　B．$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}$

C．$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_5}$　　D．$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_6}$

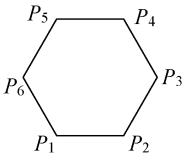


图7-2-1

8．向量的模与平方的关系：$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

★已知$\vec{a}$，$\vec{b}$均为单位向量，它们的夹角为60°，那么$|\vec{a}+3\vec{b}|=$_____.

9．向量的数量积满足乘法公式

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$；$(\vec{a}\pm\vec{b})^2=\vec{a}^2\pm2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2\pm2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

★已知两个单位向量$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$的夹角为120°，若向量$\vec{a}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}$，$\vec{b}=4\vec{e_1}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$____.

10．平面向量数量积的运算律

交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

对实数的结合律：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})(\lambda\in\mathbf{R})$；

分配律：$(\vec{a}\pm\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}\pm\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\pm\vec{b})$.

★判断下列各命题正确与否：

① $0\vec{a}=0$；　② 若$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则$\vec{b}\neq\vec{c}$当且仅当$\vec{a}=\vec{0}$时成立；

③ $\vec{0}\cdot\vec{a}=0$；　④ $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$对任意$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$向量都成立；

⑤ 若$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则$\vec{b}=\vec{c}$；⑥对任意向量$\vec{a}$，有$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

11．向量的夹角：$\cos\theta=\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

当且仅当两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$同方向时，$\theta=0$，当且仅当$\vec{a}$与$\vec{b}$反方向时$\theta=\pi$，同时$\vec{0}$与其他任何非零向量之间不谈夹角这一问题.

★已知：$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，且$\vec{c}\perp\vec{a}$，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为____.

12．两个向量的数量积的坐标运算

已知两个向量$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{b}=(x_2,\ y_2)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

★平行四边形$ABCD$中，若$\overrightarrow{AB}=(2,\ 4)$，$\overrightarrow{AC}=(1,\ 3)$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=$_____.

13．垂直：如果$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{2}$，则称$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，记作$\vec{a}\perp\vec{b}$.

两个非零向量垂直的充要条件：$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.

★如图 7-2-2 所示，设点M是线段BC的中点，点A在直线BC外，$|\overrightarrow{BC}|^2=16$，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，则$|\overrightarrow{AM}|=$_____.

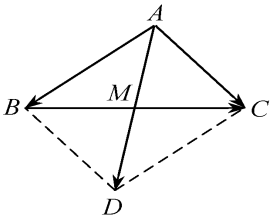


图 7-2-2

【方法导引】

【例 7-2-1】 已知向量$\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$，$\vec{c}=(4,\ 1)$.（1）求满足$\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$的实数$m$，$n$；（2）若$(\vec{a}+k\vec{c})//(2\vec{b}-\vec{a})$，求实数$k$；（3）若$\vec{d}$满足$(\vec{d}-\vec{c})//(\vec{a}+\vec{b})$，且$|\vec{d}-\vec{c}|=\sqrt{5}$，求$\vec{d}$.

【解】（1）$\because\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$，又$\because\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$，$\vec{c}=(4,\ 1)$，

$$\therefore\begin{cases}-m+4n=3\\2m+n=2\end{cases}，\text{解得：}\begin{cases}m=\dfrac{5}{9}\\n=\dfrac{8}{9}\end{cases}.$$

（2）$\because\vec{a}+k\vec{c}=(3+4k,\ 2+k)$，$2\vec{b}-\vec{a}=(-5,\ 2)$，又$\because(\vec{a}+k\vec{c})//(2\vec{b}-\vec{a})$，

$\therefore 2(3+4k)+5(2+k)=0$，解得：$k=-\frac{16}{13}$.

（3）设$\vec{d}=(x,\ y)$，得$\vec{d}-\vec{c}=(x-4,\ y-1)$，$\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 4)$，

又$\because(\vec{d}-\vec{c})//(\vec{a}+\vec{b})$，且$|\vec{d}-\vec{c}|=\sqrt{5}$

$$\therefore\begin{cases}4(x-4)-2(y-1)=0\\\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=\sqrt{5}\end{cases}，\text{解得：}\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$$

所以$\vec{d}=(3,\ -1)$或$\vec{d}=(5,\ 3)$.

【例 7-2-2】 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=2$，求$|\vec{a}+\vec{b}|$的值.

【解】$\because|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5-2\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，

得：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，$\therefore|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=6$，

故$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{6}$.

【例 7-2-3】 已知在△ABC中，已知$A(2,\ -1)$，$B(3,\ 2)$，$C(-3,\ 1)$，BC边上的高为AD，求$\overrightarrow{AD}$.

【解】设点$D(x,\ y)$，由题意知：$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BD}//\overrightarrow{BC}$，

又∵ $\overrightarrow{AD}=(x-2,\ y+1)$，$\overrightarrow{BC}=(-6,\ -1)$，$\overrightarrow{BD}=(x-3,\ y-2)$，

$\therefore \begin{cases}-6(x-2)-(y+1)=0\\-6(y-2)+(x-3)=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=\dfrac{57}{37}\\y=\dfrac{65}{37}\end{cases}$，

所以 $\overrightarrow{AD}=(-\dfrac{17}{37},\ \dfrac{102}{37})$.

【例 7-2-4】 平面内有向量 $\overrightarrow{OA}=(1,\ 7)$，$\overrightarrow{OB}=(5,\ 1)$，$\overrightarrow{OP}=(2,\ 1)$，点 X 为直线 OP 上的一个动点.

（1）当 $\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}$ 取最小值时，求 $\overrightarrow{OX}$ 的坐标；

（2）当点 X 满足（1）的条件和结论时，求 $\cos\angle AXB$ 的值.

【解】（1）设点 $X(x,\ y)$，∵点 X 为直线 OP 上的一个动点，$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OP}$ 即 $x=2y$

又∵ $\overrightarrow{XA}=(1-x,\ 7-y)=(1-2y,\ 7-y)$，$\overrightarrow{XB}=(5-x,\ 1-y)=(5-2y,\ 1-y)$，

$\therefore \overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}=(1-2y)(5-2y)+(7-y)(1-y)=5y^2-20y+12=5(y-4)^2-8$

当 $y=4$，$x=8$ 时，$\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}$ 取得最小值，故 $\overrightarrow{OX}=(8,\ 4)$.

（2）∵ $\overrightarrow{OX}=(8,\ 4)$，∴ $\overrightarrow{XA}=(-7,\ 3)$，$\overrightarrow{XB}=(-3,\ -3)$

$$\cos\angle AXB=\frac{\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}}{|\overrightarrow{XA}|\cdot|\overrightarrow{XB}|}=\frac{2\sqrt{29}}{29}.$$

【实战演练】

一、达标检测

1．已知向量 $\vec{a}=(\cos15°,\ \sin15°)$，$\vec{b}=(-\sin15°,\ \cos15°)$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$ （　　）

A．1　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

2．设 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是任意的非零平面向量，且相互不共线，则

①$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}=\vec{0}$；　　②$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})=9|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2$；

③$|\vec{a}|-|\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$；　　④$(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ 不与 $\vec{c}$ 垂直.

其中真命题的个数是 （　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

3．在△ ABC 中，$(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2$，则△ ABC 的形状一定是 （　　）

A．等边三角形　　B．等腰三角形　　C．直角三角形　　D．等腰直角三角形

4．一质点受到平面上的三个力 $\overrightarrow{F_1}$，$\overrightarrow{F_2}$，$\overrightarrow{F_3}$（单位：牛顿）的作用而处于平衡状态．已知 $\overrightarrow{F_1}$，$\overrightarrow{F_2}$ 成 60° 角，且 $\overrightarrow{F_1}$，$\overrightarrow{F_2}$ 的大小分别是 2 和 4，则 $\overrightarrow{F_3}$ 的大小为 （　　）

A．6　　B．2　　C．$2\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{7}$

5．已知点 $M(-3,\ -2)$，$N(6,\ 1)$，且 $\overrightarrow{MP}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MN}$，则点 P 的坐标为_____.

6．已知平面上三点 A，B，C 满足 $|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{BC}|=1$，$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{3}$，则

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=$_____.

7. 已知点 $A(-2,4)$，$B(3,-1)$，$C(-3,-4)$ 且 $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CB}$. 求点 M、N 及 $\overrightarrow{MN}$ 的坐标.

8．设向量 $\vec{a}=(4\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{b}=(\sin\beta,4\cos\beta)$，$\vec{c}=(\cos\beta,-4\sin\beta)$

（1）若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}-2\vec{c}$ 垂直，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值；

（2）求 $|\vec{b}+\vec{c}|$ 的最大值；

（3）若 $\tan\alpha\tan\beta=16$，求证：$\vec{a}//\vec{b}$.

二、直击高考

1．（2013 年单招试题）如果向量 $\vec{a}=(2,-3)$，$\vec{b}=(3,2)$，那么　　（　　）

A．$\vec{a}//\vec{b}$　　B．$\vec{a}\perp\vec{b}$　　C．$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60°　D．$|\vec{a}|=$

2．（2012 年单招试题）已知向量 $\vec{a}=(1,x)$，$\vec{b}=(-1,x)$．若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $|\vec{a}|=$　　（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．4

3．（2010 年单招试题）设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，$\vec{a}=(2,1)$，$\vec{a}+2\vec{b}=(4,5)$，则 $\sin\theta=$____.

【提炼反思】

1．坐标的引入使向量的运算完全代数化，成了数形结合的载体，也加强了向量与解析几何的联系.

2．平面向量的数量积及其几何意义是本节的重点，常用数量积处理向量垂直问题．向量的长度、角度问题是难点.

3．向量的数量积是向量之间的一种乘法运算，它是向量与向量的运算，结果却是一个数量，所以向量的数量积的坐标表示是纯数量的坐标表示.

4．向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角：（1）当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平移成有公共起点时两向量所成的角才是夹角；（2）$0\leqslant<\vec{a},\vec{b}>\leqslant\pi$；（3）$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

第3讲　复数的概念及运算

【夯实基础】

1．复数的概念

（1）形如$a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）的数叫复数，复数通常用小写字母z表示，即$z=a+b\mathrm{i}$，其中a叫做复数的实部、b叫做复数的虚部，i称为虚数单位．

★复数$\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$的虚部为_____．

（2）复数$z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）中，当$b=0$时，$z=a+b\mathrm{i}$是实数；除了实数以外的数，即当$b\neq0$时，$z=a+b\mathrm{i}$是虚数；当$a=0$，$b\neq0$时，$z=a+b\mathrm{i}$是纯虚数．全体复数构成的集合$\{z\mid z=a+b\mathrm{i},\ a\in\mathbf{R},\ b\in\mathbf{R}\}$叫做复数集，常用$\mathbf{C}$来表示．

★实数a分别取什么值时，复数$z=\dfrac{a^2-a-6}{a+3}+(a^2-2a-15)\,\mathrm{i}$是：（1）实数；（2）虚数；（3）纯虚数．

2．复数相等

（1）任意两个复数，只有相等与不等的关系，不能像实数那样比较大小．只有当两个复数都为实数时，才可以比较大小；

（2）如果两个复数$a+b\mathrm{i}$与$c+d\mathrm{i}$的实部与虚部分别相等，则称这两个复数相等．记作：$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$．即$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$（$a$，$b$，$c$，$d\in\mathbf{R}$）．

★设$z_1=(m^2-2m-3)+(m^2-4m+3)\mathrm{i}$（$m\in\mathbf{R}$），$z_2=5+3\mathrm{i}$，当$m$取何值时，$z_1=z_2$？

3．共轭复数

如果两个复数的实部相等，而虚部互为相反数，则这两个复数互为共轭复数．复数$z=a+b\mathrm{i}$的共轭复数记作$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$．

设互为共轭的两复数分别为$z=a+b\mathrm{i}$及$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$），则$z=\bar{z}\Leftrightarrow z$为实数；$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2=a^2+b^2$．

★已知复数$z=\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2}$，$\bar{z}$是$z$的共轭复数，则$z\cdot\bar{z}=$_____．

4．复数的模与轴角

（1）复平面内复数 $z=a+b\mathrm{i}$（$a,b\in\mathbf{R}$）与点 $Z(a,b)$ 一一对应．设 $\overrightarrow{OZ}=a+b\mathrm{i}$（$a,b\in\mathbf{R}$），则向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度叫做复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的模，记作 $|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$ ．

（2）以实轴（x 轴）的正半轴为始边，OZ 为终边的角 θ 叫做复数 z 的辐角．复数的辐角是不唯一的．若 θ 是复数 z 的辐角，则 $\theta+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）也是 z 的辐角．把在 $(-\pi,\pi]$ 内的辐角叫做辐角主值，记作 $\arg z$ ．其中，若点 $Z(a,b)$ 在第一象限时，$\arg z=\arctan\dfrac{b}{a}$；若点 $Z(a,b)$ 在第二象限时，$\arg z=\pi-\arctan|\dfrac{b}{a}|$；若点 $Z(a,b)$ 在第三象限时，$\arg z=-\pi+\arctan|\dfrac{b}{a}|$；若点 $Z(a,b)$ 在第四象限时，$\arg z=-\arctan|\dfrac{b}{a}|$．规定：复数 0 的辐角是任意值．

★设 $z=1-\mathrm{i}$，则 $|z|=$_____，$\arg z=$_____．

5．复数的三角形式和指数形式

把 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 叫做复数的三角形式．其中 $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0$，$\theta$ 是复数 z 的辐角．注意：形式中前面是 $\cos\theta$，后面是 $\sin\theta$，θ 前后相同，且 $\cos\theta$ 与 $\mathrm{i}\sin\theta$ 前面的系数都是 1，中间用“+”连接．我们把 $z=re^{\mathrm{i}\theta}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 叫做复数的指数形式．

★ 复数 $z=-\mathrm{i}$ 的三角形式是_____，指数形式是_____．

6．复数的运算

（1）复数的代数运算

设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$（$a,b,c,d\in\mathbf{R}$）

① i 的幂　$\mathrm{i}^{4n}=1$，$\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4n+2}=-1$，$\mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}$　（$n\in\mathbf{Z}$）；

② 复数的加法和减法　$z_1\pm z_2=(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}$；

③ 复数的乘法　$z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}$；

④ 复数的除法　$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\dfrac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$（$c+d\mathrm{i}\neq 0$）

复数除法是乘法的逆运算，其实质是分母实数化．

特别地：① $(a\pm b\mathrm{i})^2=a^2-b^2\pm 2ab\mathrm{i}$，$(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2$　（$a,b\in\mathbf{R}$）；

② $(1\pm\mathrm{i})^2=\pm 2\mathrm{i}$，$\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$，$\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$；

③ 复数的加法满足交换律和结合律，乘法满足交换律、结合律及乘法对加法的分配律；

（2）复数的三角运算

设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$

① $z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$（复数积的模等于模的积，积的辐角等于辐角的和）；

② $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$（复数商的模等于模的商，商的辐角等于辐角的差）；

③ $z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$（复数的 n 次幂的模等于原复数模的 n 次幂，辐角等于原复数辐角的 n 倍．这个结论叫做棣莫弗定理或棣莫弗法则）．

★ 计算：

（1）$(3+7\mathrm{i})+(-3+2\mathrm{i})-(-4+3\mathrm{i})$；　　（2）$(2-6\mathrm{i})(-1+7\mathrm{i})$；

（3）$\dfrac{2-3\mathrm{i}}{3+7\mathrm{i}}$；　　（4）$\sqrt{3}(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3})\cdot\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6})$.

7．实系数一元二次方程在复数集**C**上的根

已知实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），记 $\Delta=b^2-4ac$，则

（1）当 $\Delta>0$ 时，方程有两不相等的实根；

（2）当 $\Delta=0$ 时，方程有两相等的实根；

（3）当 $\Delta<0$ 时，方程有一对共轭复根.

★方程 $3x^2-2x+2=0$ 的根为_____.

【方法导引】

【例 7-3-1】 实数 m 分别取什么数值时，复数 $z=(m^2+5m+6)+(m^2-2m-15)\mathrm{i}$ 是：（1）实数；（2）虚数；（3）纯虚数；（4）对应点在 x 轴上方；（5）对应点在直线 $x+y+5=0$ 上.

【解】（1）当 z 是实数时，$m^2-2m-15=0$，即 $m=-3$ 或 $m=5$；

（2）当 z 是虚数时，$m^2-2m-15\neq0$，即 $m\neq-3$ 且 $m\neq5$；

（3）当 z 是纯虚数时，$\begin{cases}m^2+5m+6=0\\m^2-2m-15\neq0\end{cases}$，即 $m=-2$；

（4）对应点在 x 轴上方，$m^2-2m-15>0$，即 $m<-3$ 或 $m>5$；

（5）对应点在直线 $x+y+5=0$ 上，$m^2+5m+6+m^2-2m-15+5=0$，

解得：$m=\dfrac{-3+\sqrt{41}}{4}$ 或 $m=\dfrac{-3-\sqrt{41}}{4}$.

【例 7-3-2】 已知 z，ω 为复数，$(1+3\mathrm{i})z$ 为纯虚数，$\omega=\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}$，且 $|\omega|=5\sqrt{2}$，求 ω.

【解】 设 $z=a+b\mathrm{i}$，$\omega=c+d\mathrm{i}$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），

$\because(1+3\mathrm{i})z=(a-3b)+(3a+b)\mathrm{i}$ 是纯虚数，$\therefore a-3b=0$，$3a+b\neq0$，

又$\because\omega=\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{a+b\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{2a+b}{5}+\dfrac{2b-a}{5}\mathrm{i}$，即 $\begin{cases}c=\dfrac{2a+b}{5}\\d=\dfrac{2b-a}{5}\end{cases}$，

又$\because|\omega|=5\sqrt{2}$，$\therefore c^2+d^2=50$，解得：$\begin{cases}a=15\\b=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-15\\b=-5\end{cases}$，$\begin{cases}c=7\\d=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}c=-7\\d=1\end{cases}$，

故 $\omega=7-\mathrm{i}$ 或 $\omega=-7+\mathrm{i}$.

【例 7-3-3】 计算下列各式：

（1）$\mathrm{i}^{2014}+(\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})^8-(\dfrac{\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}})^{50}$；　　（2）$(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})^6$.

【解】（1）原式$=\mathrm{i}^{4\times503+2}+[2(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4})]^8-(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4})^{50}$

$=\mathrm{i}^2+256(\cos2\pi+\mathrm{i}\sin2\pi)-(\cos\dfrac{25\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{25\pi}{2})$

$=-1+256-\mathrm{i}=255-\mathrm{i}$

（2）原式$=[\cos(-\dfrac{\pi}{3})+\mathrm{i}\sin(-\dfrac{\pi}{3})]^6=\cos(-2\pi)+\mathrm{i}\sin(-2\pi)=1$

【例 7-3-4】 设等比数列z_1，z_2，z_3，…，z_n，…其中$z_1=1$，$z_2=a+b\mathrm{i}$，$z_3=b+a\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$ 且$a>0$）.

（1）求a，b的值；

（2）试求使$z_1+z_2+\cdots+z_n=0$ 的最小正自然数n；

（3）对（2）中的自然数n，求$z_1z_2\cdots z_n$的值.

【解】（1）由题意得：$z_2^{\,2}=z_1z_3$，即$a^2-b^2+2ab\mathrm{i}=b+a\mathrm{i}$，

得$\begin{cases}a^2-b^2=b\\2ab=a\end{cases}$，又∵$a>0$，解得：$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$.

（2）由（1）知等比数列的公比$q=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}=\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}$，

∵$z_1+z_2+\cdots+z_n=0$，即$\dfrac{1-(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})^n}{1-(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})}=\dfrac{1-\cos\frac{n\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{6}}{1-\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}}=0$

即$\begin{cases}1-\cos\dfrac{n\pi}{6}=0\\-\sin\dfrac{n\pi}{6}=0\end{cases}$的最小正自然数$n=12$.

（3）$z_1z_2\cdots z_{12}=z_1\cdot z_1q\cdot z_1q^2\cdots z_1q^{11}=q^{66}=(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6})^{66}$

$=\cos11\pi+\mathrm{i}\sin11\pi=-1$.

【实战演练】

一、达标检测

1．复数$(\mathrm{i}-\dfrac{1}{\mathrm{i}})^3$等于　　（　　）

A．8　　B．−8　　C．8i　　D．−8i

2．复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 在复平面上对应的点位于 （　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．若复数 $(a^2-3a+2)+(a-1)\mathrm{i}$ 是纯虚数，则实数 a 的值为 （　　）

A．1　　B．2　　C．1或2　　D．-1

4．下列复数中属于三角形式的是 （　　）

A．$8(\sin\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{6})$　　B．$8(\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6})$

C．$-8(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6})$　　D．$8[\cos(-\dfrac{\pi}{6})+\mathrm{i}\sin(-\dfrac{\pi}{6})]$

5．若 $z\in\mathbf{C}$，且 $(3+\mathrm{i})z=1$，则 $z=$_____.

6．若 z 是实系数方程 $x^2+2x+p=0$ 的一个虚根，且 $|z|=2$，则 $p=$_____.

7．已知复数 z_1 满足 $(z_1-2)(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$（i 为虚数单位），复数 z_2 的虚部为 2，$z_1\cdot z_2\in\mathbf{R}$，求 z_2.

8．设 a，b 为实数，若复数 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{a+b\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$，求 a，b.

二、直击高考

1．（2012 年单招试题）若复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})\bar{z}=1-\mathrm{i}$，则 $z=$ （　　）

A．$1+\mathrm{i}$　　B．$1-\mathrm{i}$　　C．i　　D．$-\mathrm{i}$

2．（2011 年单招试题）设 i 为虚数单位，若复数 $(a+\mathrm{i})(1+a^2\mathrm{i})$ 是实数，则实数 $a=$___.

3．（2010 年单招试题）复数 $\mathrm{i}^{2010}(1+\mathrm{i})=$ （　　）

A．$-1+\mathrm{i}$　　B．$1+\mathrm{i}$

C．$\sqrt{2}(\cos\dfrac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{4})$　　D．$\cos\dfrac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}$

【提炼反思】

1．复数的四则运算一般用代数形式，加减乘运算按多项式运算法则计算，除法需把分母实数化，必须准确熟练地掌握.

2．复数的乘、除、乘方运算常用三角形式.

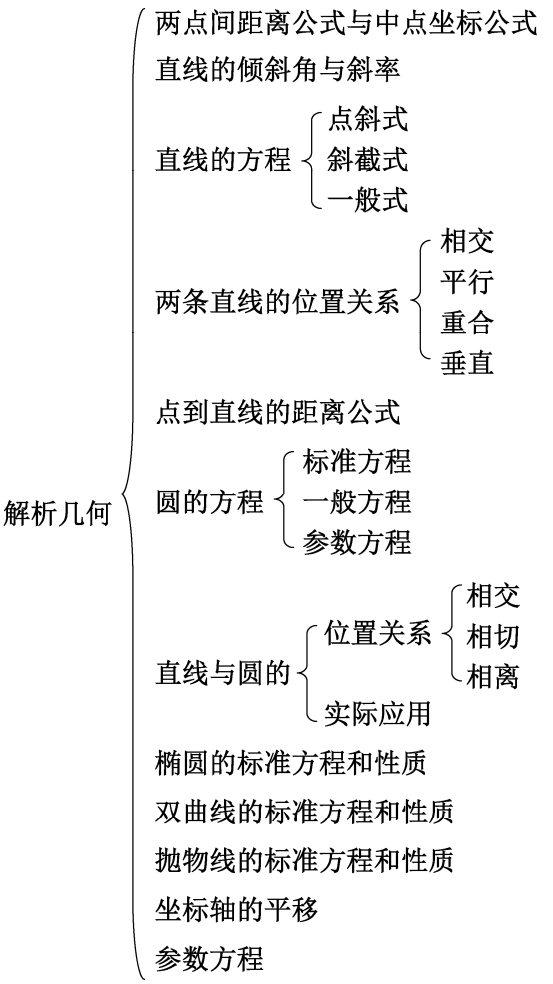
3．复数的代数运算与实数有密切联系但又有区别，在运算中要特别注意实数范围内的运算法则在复数范围内是否还适用.

4．代数形式运算的结果是复数的代数形式，便于复数问题的实虚互化，以及复数概念的研究.

5．实数系数一元二次方程，当 $\Delta<0$ 时，有两个共轭复根.

专题八　平面解析几何

【思维导航】



【考点梳理】

考　　点	要　　求
两点间距离公式与中点公式	理解
直线的倾斜角与斜率	理解
直线的方程	掌握
两条直线的位置关系	理解

续表

考　点	要　求
点到直线的距离公式	了解
圆的方程	掌握
直线与圆的位置关系	理解
直线与圆的方程的实际应用	理解
椭圆的标准方程和性质	理解
双曲线的标准方程和性质	了解
抛物线的标准方程和性质	了解
坐标轴的平移	理解
参数方程	了解

第1讲　直　线

【夯实基础】

1．两点间距离公式及中点坐标公式

已知两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 中点 $M(x, y)$，

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$；中点坐标公式：$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$.

★已知两点 $A(1, 3)$，$B(2, 0)$，求线段 AB 的长度和中点坐标.

2．直线的倾斜角、斜率

（1）倾斜角定义：在直角坐标平面上，直线 l 向上的方向与 x 轴正方向所夹的最小正角 α，是直线 l 的倾斜角，范围 $[0, \pi)$.

（2）斜率：$k=\tan\alpha$（$\alpha\neq 90°$）

（规定直线与 x 轴平行或重合时，倾斜角为 0，倾斜角的范围为 $[0, \pi)$，倾斜角为 90° 的直线没有斜率.）

（3）已知过两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$（$x_1\neq x_2$）.

（若 $x_1=x_2$，即直线 AB 垂直于 x 轴时，k 不存在）.

★求经过点 $M(-2, 0)$，$N(-5, 3)$ 两点的直线的斜率与倾斜角.

（4）直线倾斜角与斜率关系：

α	零角	锐角	直角	钝角
	$\alpha=0°$	$0°<\alpha<90°$	$\alpha=90°$	$90°<\alpha<180°$
k	$k=0$	$k>0$	k 不存在	$k<0$

★已知直线的倾斜角为0°，则斜率为_____，倾斜角为60°，斜率为_____，倾斜角为90°，斜率为_____，倾斜角为150°，斜率为_____.

3．直线方程的几种形式

（1）点斜式：已知点 $P(x_0, y_0)$，斜率 k，可设直线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$.

（2）斜截式：已知斜率 k 和纵截距 b，可设直线方程为 $y=kx+b$.

（直线的截距：①直线在坐标轴上的截距可正、可负，也可为零；②纵横截距相等 $\Leftrightarrow k=-1$ 或直线过原点；③纵横截距大小相反 $\Leftrightarrow k=1$ 或直线过原点；④纵横截距绝对值相等 $\Leftrightarrow k=\pm1$ 或直线过原点.）

（3）一般式：$Ax+By+C=0$（$AB\neq0$）.

（4）特殊情况：过点 $A(x_0, y_0)$，平行于 x 轴，则直线方程为 $y=y_0$；平行 y 轴，则为 $x=x_0$.

（设直线方程的常用技巧：①已知直线的纵截距 b，常设为 $y=kx+b$；②已知直线过点 (x_0, y_0)，k 存在，设 $y-y_0=k(x-x_0)$；k 不存在，$x=x_0$；③与直线 l：$Ax+By+C=0$ 平行，可设为 $Ax+By+C_1=0$；④与直线 l：$Ax+By+C=0$ 垂直，可设 $Bx-Ay+C_1=0$.）

★求下列直线方程：

（1）过点 A（2，1），倾斜角为135°的直线方程为_____；

（2）过点 A（3，－5）和 B（5，2）的直线方程为_____；

（3）过点 $A(3,-2)$ 平行于 x 轴的直线方程为_____；平行于 y 轴的直线方程为_____；

（4）在 y 轴上截距为3，斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线方程为_____.

4．斜率的三个计算公式

（1）已知倾斜角 α，则 $k=\tan\alpha$（$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$）；

（2）已知过两点 $p_1(x_1, y_1)$，$p_2(x_2, y_2)$，则 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$（$x_1\neq x_2$）；

（3）已知直线 $Ax+By+C=0$，则 $k=-\frac{A}{B}$（$B\neq0$）.

★求经过 $A(-3,1)$，$B(-5,3)$ 两点的直线方程和斜率.

5．两直线的位置关系

	斜截式 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$	一般式 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$
平　行	$k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$	$A_1B_2-A_2B_1=0$ 且 $A_1C_2-A_2C_1\neq0$
重　合	$k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$	$A_1B_2-A_2B_1=0$ 且 $A_1C_2-A_2C_1=0$

续表

	斜截式 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$	一般式 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$
相　交	$k_1\neq k_2$	$A_1B_2-A_2B_1\neq 0$
垂　直	$k_1k_2=-1$	$A_1A_2+B_1B_2=0$

（注意：两直线斜率都不存在，则$l_1/\!/\,l_2$；一直线斜率不存在，另一直线斜率为 0，则$l_1\perp l_2$.）

★判断下列几组直线的位置关系：

（1）l_1：$2x-y-1=0$，l_2：$4x-2y-3=0$；　　（2）l_1：$x-2y=\dfrac{5}{2}$，l_2：$3x-6y-\dfrac{3}{2}=0$；

（3）l_1：$2x+3y-4=0$，l_2：$4x-3y=2$；　　（4）l_1：$2x-3y=4$，l_2：$6x-9y-12=0$.

6．点到直线的距离

设点$P(x_0,\ y_0)$到直线$Ax+By+C=0$的距离为d，则$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

★点$P(-1,\ 0)$到直线$3x+4y-2=0$的距离为_____.

【方法导引】

【例 8-1-1】 已知△ABC的顶点A（-5，0），B（3，-3），C（0，2），求AB边所在的直线方程及BC边上中线所在的直线方程.

【解】由题知：$k_{AB}=\dfrac{-3-0}{3+5}=-\dfrac{3}{8}$

l_{AB}：$y-0=-\dfrac{3}{8}(x+5)$，即$3x+8y+15=0$

BC边上中点为$D(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2})$，$k_{AD}=\dfrac{-\frac{1}{2}-0}{\frac{3}{2}+5}=-\dfrac{1}{13}$，

l_{AD}：$y-0=-\dfrac{1}{13}(x+5)$，即$x+13y+5=0$.

【例 8-1-2】 已知直线过点M（-1，3），其倾斜角α满足$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，求直线方程.

【解】∵$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\alpha\in[0,\ \pi)$

∴$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$

∴$k=\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$

所以直线的方程为 $y-3=\frac{3}{4}(x+1)$，即 $3x-4y+15=0$.

★【例 8-1-3】　已知直线 l_1：$x+my+6=0$ 和 l_2：$(m-2)x+3y+2m=0$，分别求满足下列条件的 m 的值：（1）$l_1 // l_2$；（2）$l_1 \perp l_2$；（3）l_1 与 l_2 相交；（4）l_1 与 l_2 重合.

【解】（1）因为 $l_1 // l_2$，所以 $A_1B_2-A_2B_1=0$ 且 $A_1C_2-A_2C_1\neq 0$

即 $\begin{cases}1\times 3-(m-2)\times m=0\\ 1\times 2m-(m-2)\times 6\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=3\text{或}m=-1\\ m\neq 3\end{cases}\Rightarrow m=-1$

（2）因为 $l_1 \perp l_2$，所以 $A_1A_2+B_1B_2=0$

即 $1\times(m-2)+m\times 3=0$，即 $m=\frac{1}{2}$.

（3）因为 l_1 与 l_2 相交，所以 $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$

即 $1\times 3-(m-2)\times m\neq 0$，即 $m\neq 3$且$m\neq -1$.

（4）因为 l_1 与 l_2 重合，所以 $A_1B_2-A_2B_1=0$ 且 $A_1C_2-A_2C_1=0$

即 $\begin{cases}1\times 3-(m-2)\times m=0\\ 1\times 2m-(m-2)\times 6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=3\text{或}m=-1\\ m=3\end{cases}\Rightarrow m=3$.

★【例 8-1-4】　求经过 $2x+y+8=0$与$x+y+3=0$ 的交点，且满足下列条件的直线方程：

（1）平行于直线 $4x+3y-5=0$；

（2）垂直于直线 $2x+3y-16=0$.

【解】两直线的交点 $\begin{cases}2x+y+8=0\\ x+y+3=0\end{cases}$，得（$-5$，2）；

（1）由题可知直线 $4x+3y-5=0$ 的斜率为 $-\frac{4}{3}$，所以设所求直线方程为

$y=-\frac{4}{3}x+b$，

将（−5，2）代入，得 $b=-\frac{14}{3}$

所以，所求直线的方程为 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{14}{3}$，即 $4x+3y+14=0$.

（2）因为 $2x+3y-16=0$，所以该直线的斜率为 $-\frac{2}{3}$

因为两直线垂直，所以所求直线的斜率为 $k=\frac{3}{2}$

又因为过点（-5，2），所以 $y-2=\frac{3}{2}(x+5)$，即 $3x-2y+19=0$.

（第（1）题也可设为 $4x+3y+C=0$，（2）可设直线方程为 $3x-2y+C=0$ 来求直线方程.）

【实战演练】

一、达标检测

1．原点到点（3，1）的距离是　　（　　）

A．3　　B．4　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{10}$

2．已知直线 l 垂直于 x 轴，则直线 l 的倾斜角　　（　　）

A．0°　　B．45°　　C．90°　　D．180°

3．已知两直线 $y=ax-2$ 和 $y=(a+2)x+1$ 互相垂直，则 a 等于　　（　　）

A．2　　B．1　　C．0　　D．-1

4．直线 $x-y+1=0$ 与坐标轴截得的线段的中点坐标为　　（　　）

A．$(-\frac{1}{2},1)$　　B．$(\frac{1}{2},1)$　　C．$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　　D．$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

5．在△ABC 中，已知点 A（2，1），BC 边所在的直线方程为 $y=2x$，则 BC 边上的高为　　（　　）

A．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{3}{2}$

6．直线 $x\tan\frac{7\pi}{5}-y=0$ 的倾斜角为　　（　　）

A．$-\frac{7\pi}{5}$　　B．$\frac{2\pi}{5}$　　C．$\frac{7\pi}{5}$　　D．$\frac{3\pi}{5}$

7．已知点（2，3）到直线 $x-2y+k=0$ 的距离为 $\sqrt{5}$，则 $k=$_____.

8．已知一条直线的斜率为 3，且与直线 $y+x+1=0$ 在 y 轴上的截距相等，则该直线的方程为_____.

9．若三点 $A(\frac{1}{2},m)$，$B(-2,3)$，$C(3,-2)$ 在同一条直线上．求 m 的值.

10．已知直线的倾斜角的余弦值是方程 $4x^2+4x+1=0$ 的根，求该直线的斜率.

11．求经过点 A（1，2）且在两坐标轴上截距的绝对值相等的直线方程.

12．不管 m 怎样变化，求直线 $(m+2)x-(2m-1)y-(3m-4)=0$ 恒过的定点.

13．已知直线 l_1：$ax+3y+1=0$ 和直线 l_2：$x+2ay-5=0$．

（1）若 $l_1 // l_2$，求 a 的值；

（2）若 $l_1 \perp l_2$，求 a 的值．

二、直击高考

1．（2011 年单招试题）已知过点 $A(1,\ a)$ 和 $B(2,\ 4)$ 的直线与直线 $x-y+1=0$ 垂直，则 a 的值为（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．3　　D．5

2．（2012 年单招试题）若直线 l 过点（－1，2）且与直线 $2x-3y+1=0$ 平行，则 l 的方程为（　　）

A．$3x+2y+8=0$　B．$2x-3y+1=0$　C．$2x-3y+8=0$　D．$3x+2y-8=0$

【提炼反思】

1．直线的倾斜角和斜率都是用来确定直线的方向的，而“斜率”是贯穿直线部分的重要概念，这是因为斜率可以用坐标来反映直线的位置，便于用坐标来研究两条直线平行、重合及相交等重要的位置关系．

2．直线方程的概念指出了“直线”和“方程”统一的条件，求直线方程，实际上就是求直线上的每一个点的坐标（x，y）都适合的二元一次方程 $F(x,\ y)=0$．直线点斜式方程的求解过程中所使用的方法是求曲线方程的基本方法，直线的其他形式的方程都是以点斜式方程为基础的，采用恒等变形的方法得到．

3．直线的一般式概括了有斜率的直线方程和无斜率的直线方程的共同本质属性，它使我们更深刻的认识直线方程．

第 2 讲　圆

【夯实基础】

1．圆的标准方程：圆心为 $C(a,\ b)$，半径为 r 的圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$．

★圆 $(x-5)^2+(y+6)^2=3$ 的圆心为_____，半径为_____．

2．圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，其中圆心坐标为 $(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2})$，半径为 $r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$．

（1）在求圆的方程时，若已知圆上三个点的坐标，通常设圆的一般方程求解，计算量较小；

（2）$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 轨迹是圆的充要条件：①平方项系数相等；②没有 xy 项；③ $D^2+E^2-4F>0$.

★已知圆的方程为 $x^2+y^2-4x+6y+9=0$，圆心为_____，半径为_____.

3．圆的参数方程：圆心 $C(a,\ b)$，半径为 r 的圆的参数方程是

$$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}\quad(\theta\text{ 为参数}).$$

★圆心为（2，3），半径为 2 的圆的参数方程为_____.

【方法导引】

【例 8-2-1】 已知△ABC 的顶点 A（－2，－1），B（－1，－1），C（0，0），求△ABC 的外接圆方程.

【解】设该外接圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，则

$$\begin{cases}4+1-2D-E+F=0\\ 1+1-D-E+F=0\\ F=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=3\\ E=-1\\ F=0\end{cases}$$

所以△ABC 的外接圆的方程为 $x^2+y^2+3x-y=0$.

【例 8-2-2】 已知圆的方程为 $x^2+y^2-4x+6y+9=0.$

（1）求该圆心 C 的坐标和圆的半径；

（2）判断点 M（2，－1），N（1，－2），Q（2，－3）与该圆的位置关系.

【解】（1）因为 $D=-4,\ E=6,\ F=9$

所以 $-\dfrac{D}{2}=2,\ -\dfrac{E}{2}=-3$，即圆心坐标为（2，－3）

又因为 $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=2$，即圆的半径为 2.

（2）因为 $|MC|=\sqrt{(2-2)^2+(-1+3)^2}=2=r$，所以点 M 在圆上；

因为 $|NC|=\sqrt{(1-2)^2+(-2+3)^2}=\sqrt{2}<r$，所以点 N 在圆内；

因为 $|QC|=\sqrt{(3-2)^2+(1+3)^2}=\sqrt{17}>r$，所以点 Q 在圆外.

【例 8-2-3】 若实数 x，y 满足 $(x+2)^2+y^2=3$，求 $2x-y$ 的最小值.

【解】因为 $x,\ y$ 满足 $(x+2)^2+y^2=3$，所以 $\begin{cases}x=-2+\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

故 $2x-y=-4+2\sqrt{3}\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=-4+\sqrt{15}\sin(\theta+\varphi)$

从而 $2x-y$ 的最小值为 $-4-\sqrt{15}$.

【例 8-2-4】 一座圆拱桥，现时水面宽为 22 米，拱高为 9 米．一艘高 5 米，顶宽 4 米的船，能否从桥下通过？

【解】建立如图 8-2-1 所示坐标系：A（－11，0），B（11，0），C（0，9）

可求得过这三点的圆的方程为

$$x^2+(y+\frac{20}{9})^2=(\frac{101}{9})^2$$

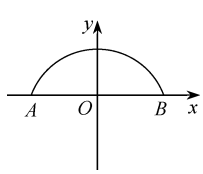


图 8-2-1

故设 M 点的坐标为（2，y_1），则

$(y_1+\frac{20}{9})^2=(\frac{101}{9})^2-4\Rightarrow y_1\approx 8.82$ （y取正值）

因为 $y_1>5$，所以船能从桥下通过.

【实战演练】

一、达标检测

1．圆心为（2，0）且经过点 P（1，3）的圆的标准方程　　（　　）

A．$x^2+(y-2)^2=2$　　B．$(x-1)^2+(y-3)^2=10$

C．$(x-2)^2+y^2=10$　　D．$(x-2)^2+y^2=10$

2．已知圆的方程 $x^2+y^2-4x-8=0$，则圆的周长是　　（　　）

A．4π　　B．$4\sqrt{3}\pi$　　C．24π　　D．$4\sqrt{2}\pi$

3．若方程 $x^2+y^2-x+y+m=0$ 表示圆，则实数 m 的取值范围是　　（　　）

A．$m<\frac{1}{2}$　　B．$m<10$　　C．$m>\frac{1}{2}$　　D．$m\leqslant\frac{1}{2}$

4．参数方程 $\begin{cases}x=1+3\cos\theta\\ y=-2+3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）所表示的圆的圆心坐标和半径为　　（　　）

A．（1，-2），$r=9$　　B．（-1，2），$r=3$

C．（1，-2），$r=3$　　D．（-1，2），$r=9$

5．以点 $A(-2,\ 2)$，$B(4,\ 1)$ 为直径的圆的标准方程为_____.

6．与圆 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ 关于原点对称的圆 C 的方程为_____.

7．求下列各圆的方程：

（1）圆心在点（0，b）上，半径为 5，过点（3，1）；

（2）以点 A（1，-1），B（-3，3）为直径的圆；

（3）经过三点 O（0，0），A（1，1），B（4，-8）的圆.

二、直击高考

1.（2011 年单招试题）若圆心在 y 轴上，半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆，位于 x 轴上方，且与直线 $x-y=0$ 相切，则圆 C 的方程为　　（　　）

A．$x^2+(y+4)^2=8$　　B．$x^2+(y-4)^2=8$　　C．$x^2+(y+2)^2=8$　　D．$x^2+(y-2)^2=8$

2．（2003 年单招试题）已知 $x^2+y^2=16$，则 $x+y-1$ 的最大值为_____.

【提炼反思】

1．求圆的方程的基本方法以待定系数法为主，应注意根据所给的条件，选择使用标准方程、一般方程或参数方程，如果问题中给出了圆心两坐标间的关系或圆心的位置时，一般采

用标准方程，如果给出圆上的三个点的坐标，则用一般方程.

2．圆的特殊位置的方程的确定应予以重视.

第3讲　直线与圆的位置关系

【夯实基础】

1．直线与圆的位置关系

圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，直线 $Ax+By+C=0$，两者的位置关系如下.

位置关系	几何法	代数法
相交	$d<r$	$\Delta>0$
相切	$d=r$	$\Delta=0$
相离	$d>r$	$\Delta<0$

★已知圆 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=kx+2$，问 k 为何值时，直线与圆：①相离；②相切；③相交.（直线与圆的位置关系判断，一般采用几何法计算量小.）

2．相交弦

相交弦的弦长 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$（d 为圆心到直线的距离）.

★直线 $y=x$ 与圆 $x^2+y^2+2y=0$ 相交所截得的弦长为_____.

3．切线问题

（1）圆心到切线的距离等于半径，这是解决切线问题的重要依据；

（2）切线和圆心与切点的连线互相垂直；

（3）经过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,\ y_0)$ 的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$；

（4）过圆外一点作圆的切线，有2条，过圆上一点，有1条切线，过圆内一点，有0条切线.

★过点 $M(-3,\ 2)$ 且与圆 $x^2+y^2=13$ 相切的直线方程为_____.

4．直线与圆的方程的实际应用

将直线与圆的方程知识与工程等实际问题互相联系，就是直线与圆的方程的实际应用.

【方法导引】

【例8-3-1】　已知圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，求过点 $P(2,\ 3)$ 的切线方程.

【解】由题知，点 P 在圆外，所以切线的条数有2条，

（1）若斜率 k 不存在，则切线方程为 $x=2$，符合题意.



（2）若斜率 k 存在，设切线方程为 $y-3=k(x-2)$，即 $kx-y+3-2k=0$

得：$\dfrac{|k-1+3-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\dfrac{3}{4}$，即 $3x-4y+6=0$

所以过点 P 的切线方程为 $x=2$ 或 $3x-4y+6=0$.

【例 8-3-2】 求圆心在直线 $2x+y=0$ 上，且与直线 $x+y-1=0$ 切于点（2，－1）的圆的标准方程.

【解】解法一：设圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

根据题意得：$\begin{cases}2a+b=0\\(2-a)^2+(-1-b)^2=r^2\\\dfrac{|a+b+1|}{\sqrt{2}}=r\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\r^2=2\end{cases}$

所以圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

解法二：设圆心坐标 $C(a,\ b)$，切于点（2，－1），则圆心和切点的连线与切线 $x+y-1=0$ 垂直，

即 $\dfrac{b+1}{a-2}=1$　　①

又因为圆心在直线 $2x+y=0$ 上

所以 $2a+b=0$　　②

联立①，②解得 $a=1$，$b=-2$，而 $r^2=(2-1)^2+(-2+1)^2=2$

所以所求圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

【例 8-3-3】 已知圆 C：$x^2+(y-1)^2=5$，直线 l：$mx-y+1-m=0$.

（1）求证：对 $m\in\mathbf{R}$，直线与圆 C 总有两个交点；

（2）设直线 l 与圆 C 交于 A，B 两点，若 $|AB|=\sqrt{17}$，求直线 l 的倾斜角；

（3）求直线 l 截圆所截得的弦最长及最短时的方程.

【解】（1）**证法一**：圆心 $C(0,\ 1)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+m^2}}<\sqrt{5}$

所以直线与圆相交.

证法二：联立方程组 $\begin{cases}mx-y+1-m=0\\x^2+(y-1)^2=5\end{cases}\Rightarrow(1+m^2)x^2-2mx+m^2-5=0$

$\Delta=16m^2+20>0$

所以直线与圆相交.

（2）由 $r^2=d^2+(\dfrac{1}{2}|AB|)^2$，得 $\dfrac{m^2}{1+m^2}+(\dfrac{1}{2}\sqrt{17})^2=5$，解得 $m^2=3$，$m=\pm\sqrt{3}$；

所以直线 l 的倾斜角为 $60°$ 或 $120°$.

（3）当直线 l 过圆心 C（0，1）时，弦长最长，此时 $m=0$，直线 l 的方程为 $y=1$；

因为直线 l 过定点 M（1，1），故当 $CM\perp l$ 时，此时直线与 y 轴平行，弦长最短，直线的方程为 $x=1$.

【实战演练】

一、达标检测

1．若直线 $3x+4y+k=0$ 与圆 $(x-3)^2+y^2=4$ 相切，则 k 的值等于（　　）

A．1 或 -19　　B．-1 或 19　　C．1　　D．± 10

2．过原点且倾斜角为 $60°$ 的直线被圆 $x^2+y^2-4y=0$ 所截得的弦长为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．$\sqrt{6}$　　D．$2\sqrt{3}$

3．直线 $3x+4y-10=0$ 与圆 $x^2+y^2=25$ 的位置关系是（　　）

A．相离　　B．相切

C．直线过圆心　　D．直线与圆相交但是不过圆心

4．圆 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=kx+2$ 没有公共点的充要条件是（　　）

A．$k\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　B．$k\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

C．$k\in(-\infty,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$　　D．$k\in(-\infty,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$

5．过点 M（0，4），且被圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ 的直线方程为_____.

6．设点 P 为 $x^2+y^2=1$ 上的动点，则点 P 到直线 $3x-4y-10=0$ 的距离的最小值为_____.

7．求过点 P（2，2）且与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 相切的切线方程.

8．直线 l 过点 P（2，1）且与圆 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ 有两个交点，求直线的斜率 k 的取值范围.

9．三条方向不同的道路，起点分别为 A，B，C，现欲建一圆形广场，使 A，B，C 三点都在广场圆周上，以正东、正北分别为 x 轴与 y 轴的正方向，任取一点为坐标原点建立直角坐标系，测得 A，B，C 三点的坐标分别为 $A(1,-1)$，$B(1,4)$，$C(4,-2)$．求：

（1）广场圆在此坐标系中的方程；

（2）广场中心位置.

二、直击高考

1.（2008 年单招试题）过点（2，3）的直线 l 与圆 C：$x^2+y^2+4x+3=0$ 交于 A，B 两点，当弦长 $|AB|$ 取最大值时，直线 l 的方程为_____.

2.（2009 年单招试题）圆 $(x+1)^2+(y+2)^2=8$ 到直线 $x+y+1=0$ 的距离等于 $\sqrt{2}$ 的点有（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【提炼反思】

1．直线与圆的位置关系的判定有几何法和代数法，通常采用几何法判断会更简洁.

2．过一定点求圆的切线时，要牢牢把握点在圆内，无切线；点在圆上，1 条切线；点在圆外，2 条切线．当点在圆外时，如果你求出的斜率 k 只有一个，那么另外一条必然是斜率不存在的直线．这时可借助于图像来求解.

3．直线与圆的方程的实际应用，建立适当的直角坐标系是解决问题的关键.

第 4 讲　椭圆的标准方程与性质

【夯实基础】

1．椭圆的定义

（1）平面内与两个定点 F_1、F_2 的距离之和等于常数 $\|PF_1|+|PF_2\|=2a$（$2a>|F_1F_2|=2c$）的点的轨迹称为椭圆．两个定点 F_1、F_2 称为椭圆的焦点.

★椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1、F_2，点 P 在椭圆上，若 $|PF_1|=2$，则 $|PF_2|=$_____，$\angle F_1PF_2=$_____.

★F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点，过 F_1 的直线交椭圆于 A，B 两点，若 $|AF_2|+|BF_2|=12$，则 $|AB|=$_____.

（2）第二定义：平面内到定点的距离和到定直线的距离的比是常数 $e(0<e<1)$ 的点的轨迹称为椭圆.

① 定点就是椭圆焦点，定直线就是准线；

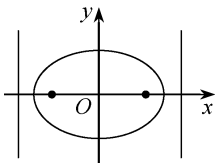
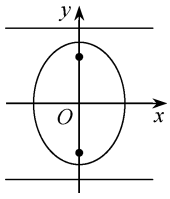
② 应用：$\frac{|PF_1|}{|PP'|}=\frac{c}{a}=e$，$e$ 是椭圆的离心率.

★已知椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上的一点 P 到左准线的距离为 5，则点 P 到右焦点的距离为（　　）

A．4　　B．6　　C．5　　D．$\frac{15}{2}$

2．椭圆的标准方程与性质

（1）椭圆的标准方程与几何性质．

	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
图　形		
范　围	$-a\leqslant x\leqslant a$，$-b\leqslant y\leqslant b$	$-b\leqslant x\leqslant b$，$-a\leqslant y\leqslant a$
焦　点	$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$
对称轴	x 轴，y 轴，长轴长为 $2a$，短轴长为 $2b$	
焦　距	$\lvert F_1F_2\rvert=2c$，$c^2=a^2-b^2$	
顶　点	$(\pm a,0)$，$(0,\pm b)$	$(\pm b,0)$，$(0,\pm a)$
准　线	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
离心率	$e=\frac{c}{a}$ $(0<e<1)$	

★椭圆上一点 $P(1,2)$ 到两焦点的距离之和为 10，则该椭圆的标准方程为_____．

（2）离心率．

注意椭圆离心率的取值范围：$e\in(0,1)$．

★若椭圆长轴、短轴和焦距成等差数列，则该椭圆的离心率为_____．

（3）椭圆标准方程的结构特征．

椭圆方程 $mx^2+ny^2=1$：① 当 $m>0$，$n>0$，$m\neq n$ 时，$mx^2+ny^2=1$ 表示椭圆；

② $n>m>0$ 时，焦点在 x 轴上的椭圆；

③ $m>n>0$ 时，焦点在 y 轴上的椭圆．

★若方程 $\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m-1}=1$ 表示椭圆，则 m 的取值范围为_____．

【方法导引】

【例 8-4-1】 根据下列条件，求椭圆的标准方程．

（1）焦点 $F_1(-3,0)$，且过点 $A(0,4)$；

（2）过点 $A(\sqrt{6},1)$，$B(-\sqrt{3},-\sqrt{2})$ 的椭圆．

【解】（1）由 $F_1(-3,0)$，知椭圆的焦点在 x 轴上，且 $c=3$

而 $A(0,4)$ 在 y 轴上，故 $b=4$

所以 $a^2=b^2+c^2=25$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$．

（2）设椭圆的方程为 $mx^2+ny^2=1$

因为 A，B 在椭圆上，所以 $\begin{cases}6m+n=1\\3m+2n=1\end{cases}\Rightarrow m=\frac{1}{9}$，$n=\frac{1}{3}$

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$.

【例 8-4-2】　已知曲线 C 上任意一点到定点 A（1，0）与到定直线 l：$x=4$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$，求该曲线 C 的方程.

【解】**解法一**：设 $P(x,\ y)$ 是曲线 C 上任意一点

$|PA|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，P 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|x-4|}{\sqrt{1+0}}=|x-4|$

由题意得：$\frac{|PA|}{d}=\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x-4|}=\frac{1}{2}$，

整理得 $3x^2+4y^2=12$，即 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

解法二：因为到定点的距离与定直线的距离之比是定值，且在(0, 1)之间，由此可知该点的轨迹是焦点在 x 轴上的椭圆，且 $c=1$, $\frac{a^2}{c}=4$，得 $a^2=4$，$b^2=a^2-c^2=4-1=3$

所以椭圆的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

【例 8-4-3】　已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的一点，两焦点为 F_1、F_2，若 $PF_1\perp PF_2$，求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积.

【解】由题知：$a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$

设 $|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，则

$\begin{cases}r_1+r_2=2a=6\\r_1^2+r_2^2=(2c)^2=20\end{cases}\Rightarrow r_1r_2=8$

所以三角形面积为 $\frac{1}{2}r_1r_2=\frac{1}{2}\times 8=4$.

【例 8-4-4】　设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），过点（0，4），离心率为 $\frac{3}{5}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）求过点（3，0）且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线被椭圆 C 所截得的线段的中点坐标.

【解】（1）将（0，4）代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $\frac{16}{b^2}=1$，$b=4$

由 $e=\frac{3}{5}$，得 $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{9}{25}$，得 $a=5$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

（2）过点（3，0）斜率为$\frac{4}{5}$的直线方程$y=\frac{4}{5}(x-3)$，设直线与C的两交点为$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，中点为$M(x_0, y_0)$，则$\begin{cases} y=\frac{4}{5}(x-3) \\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \end{cases} \Rightarrow 5x^2-15x-12=0$

$x_1+x_2=3$，则$x_0=\frac{3}{2}$，代入$y=\frac{4}{5}(x-3)$，得$y_0=-\frac{6}{5}$

所以中点M的坐标为$(\frac{3}{2}, -\frac{6}{5})$.

【实战演练】

一、达标检测

1．已知定点$F_1(-3, 0)$，$F_2(3, 0)$，在平面上，满足下列条件的动点P的轨迹是椭圆的是（　　）

A．$|PF_1|+|PF_2|=4$　　B．$|PF_1|+|PF_2|=6$

C．$|PF_1|+|PF_2|=10$　　D．$|PF_1|+|PF_2|=12$

2．“$m>n>0$”是“方程$mx^2+ny^2=1$表示焦点在y轴上的椭圆”的（　　）条件

A．充分不必要　B．必要不充分　C．充要　　D．既不充分也不必要

3．若椭圆$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{m}=1$的准线方程为$x=\pm 2\sqrt{2}$，则$m$等于（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{8}{3}$

4．设F_1，F_2分别是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点，$P$为直线$x=\frac{3}{2}a$上一点，$\triangle F_2PF_1$是底角为30°的等腰三角形，则离心率为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{5}$

5．若椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一点$P$到椭圆左焦点的距离为3，则点$P$到右准线的距离为_____.

6．若椭圆$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4}=1$的焦距为2，则$m$=_____.

7．求符合下列条件的椭圆的标准方程：

（1）一条准线$y=8$，$e=\frac{1}{2}$；

（2）两个焦点坐标为$F_1(-2, 0)$，$F_2(2, 0)$，并且经过$P(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$.

8．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 A（2，0），离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线 $y=k(x-1)$ 与椭圆交于不同的两点 M，N.

（1）求椭圆的方程；

（2）已知△ AMN 的面积是 $\frac{\sqrt{10}}{3}$，求 k 的值.

二、直击高考

1．（2004 年单招试题）设椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1、F_2，直线 l 过点 F_1 且与椭圆交于 A，B 两点，则△ ABF_2 的面积为（　　）

A．6　　B．9　　C．12　　D．13

2．（2011 年单招试题）若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$）的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则该椭圆的方程为（　　）

A．$2x^2+y^2=1$　　B．$x^2+2y^2=1$　　C．$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　D．$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

【提炼反思】

1.椭圆的第一定义中，应注意与两个定点的距离之和大于 $|F_1F_2|$，否则轨迹就不是椭圆.在第二定义中，应注意 $0<e<1$，当已知椭圆的焦点和准线时，必须看清是否是相对应的焦点与准线，否则不符合第二定义的条件.

2．椭圆方程中的参数 a，b，c 是椭圆所固有的，和椭圆的位置没有关系，必须牢记 $c^2=a^2-b^2$.

3．求椭圆的标准方程，实质就是求方程中的未知数 a，b，根据已知条件列出以 a，b 为未知数的两个方程联立后解之．但是要注意到，如果已知焦点在 x 或 y 轴时，只有一个，若未说明，则应讨论.

第5讲　双曲线的标准方程和性质

【夯实基础】

1．双曲线的定义

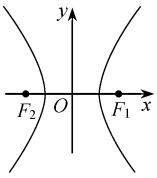
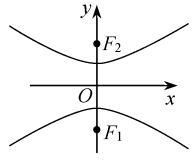
（1）平面内与两个定点 F_1、F_2 距离之差的绝对值等于常数 $\|PF_1|-|PF_2\|=2a$ （$2a<|F_1F_2|=2c$）的点的轨迹称为双曲线，两个定点 F_1、F_2 称为双曲线的焦点.

（2）第二定义：平面内到定点的距离和它到定直线的距离的比等于常数 e（$e>1$）的点的轨迹称为双曲线．双曲线上任一点 P 到焦点的距离与它到相应准线的距离之比为一定值，即“点点距为分子，点线距为分母”，其商为离心率 e（$\frac{|PF|}{PP'}=e$）.

★若双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 上的一点 P 到焦点 F_1 的距离为 15，则 P 点到另一焦点 F_2 的距离为_____.

2．双曲线的标准方程及性质

双曲线的标准方程及几何性质

标准方程	焦点在 x 轴	焦点在 y 轴
	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
图　形		
顶　点	$(\pm a,0)$	$(0,\pm a)$
对称轴	x 轴，y 轴，实轴长为 $2a$，虚轴长 $2b$	
焦　点	$(\pm c,0)$	$(0,\pm c)$
焦　距	$\|F_1F_2\|=2c$，$c^2=a^2+b^2$	
离心率	$e=\frac{c}{a}$（$e>1$）	
准　线	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
渐近线	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$

★实轴长为 8，离心率 $e=\frac{5}{4}$ 的双曲线的标准方程是_____.

3．求双曲线标准方程的三种题型

（1）待定系数法；（2）与椭圆结合题型；（3）已知渐近线方程设 λ.

★已知双曲线的一焦点为（3，0），顶点为（2，0），则它的标准方程为_____.

4．双曲线标准方程结构特征

对于方程 $mx^2+ny^2=1$：

（1）$mn<0$，$mx^2+ny^2=1$ 表示双曲线；

（2）$m>0$，$n<0$ 时，焦点在 x 轴上；

（3）$m<0$，$n>0$ 时，焦点在 y 轴上.

★若方程 $(2-m)x^2+(m-1)y^2=1$ 表示双曲线，则 m 的取值范围是_____.

5．离心率的求解方法

（1）求得 a，c 的值，代入离心率公式；

（2）根据 a，b 或 b，c 的比值，构成直角三角形求解；

（3）列含有 a，b，c 的齐次方程，借助于 $c^2=a^2+b^2$，消去 b，转化为含有 e 的方程求解.

★双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ 的离心率为_____.

6．双曲线的渐近线方程

一般地，与 $mx^2-ny^2=1$（$mn>0$）共渐近线的双曲线方程可设为 $mx^2-ny^2=\lambda$（$\lambda\neq 0$）.

以 $ax\pm by=0$ 为两渐近线的双曲线标准方程可设为 $(ax+by)(ax-by)=\lambda$（$\lambda\neq 0$）.

★与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 有共同的渐近线，且过点（-3，$2\sqrt{3}$）的双曲线方程为_____.

【方法导引】

【例 8-5-1】　求下列双曲线的标准方程：

（1）双曲线的实轴长为 6，离心率为 2，焦点在 x 轴上；

（2）和椭圆 $\frac{x^2}{29}+\frac{y^2}{36}=1$ 共焦点，且和双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$ 有相同的渐近线.

【解】（1）由题知，$2a=6$，$a=3$，而 $\frac{c}{a}=2$，得 $c=6$，所以 $b^2=c^2-a^2$

又因为焦点在 x 轴上，所以双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$.

（2）因为与椭圆 $\frac{x^2}{29}+\frac{y^2}{36}=1$ 共焦点，所以双曲线的焦点在 y 轴上，且 $c^2=7$

又因为和双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$ 有相同的渐近线，所以设所求双曲线方程为

$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=\lambda$

即 $\frac{y^2}{-4\lambda}-\frac{x^2}{-3\lambda}=1$，$a^2=-4\lambda$，$b^2=-3\lambda$

$c^2=-7\lambda=7$，所以 $\lambda=-1$，即所求双曲线方程为 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=1$.

【例 8-5-2】 求下列双曲线的离心率：

（1）若双曲线的两条准线间的距离的 4 倍等于焦距，则离心率为_____；

（2）过双曲线的焦点 F_2 作垂直于实轴的弦 PQ，F_1 是另一焦点，若 $\angle PF_1Q=\dfrac{\pi}{2}$，则双曲线的离心率为_____.

【解】（1）由题知，$2\times\dfrac{a^2}{c}\times 4=2c$，得 $\dfrac{c^2}{a^2}=4\Rightarrow e=2$.

（2）由题可知，$|PF_1|=|F_1Q|$，又因为 $\angle PF_1Q=\dfrac{\pi}{2}$

所以三角形 PF_1Q 为等腰直角三角形，

所以 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，$|PF_1|=2\sqrt{2}c$

而 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，$2c+2\sqrt{2}c=2a$

所以 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}+1$.

【例 8-5-3】 设 P 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一点，双曲线的一条渐近线方程为 $3x-2y=0$，F_1、F_2 是左右焦点，若 $|PF_1|=5$，求 $|PF_2|$.

【解】因为双曲线的一条渐近线的方程为 $3x-2y=0$

所以 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$

$\because b=3$，$\therefore a=2$

又 $\because \big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a=4$，

$\therefore |PF_2|$=9 或 1

又因为 $c-a=\sqrt{13}-2>1$

所以 $|PF_2|$=9.

【例 8-5-4】 设 F_1、F_2 分别为双曲线 C：$x^2-y^2=1$ 的左右焦点，点 P 在双曲线 C 上，$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，求△ F_1PF_2 的面积.

【解】由题知，$a=1$，$b=1$，$c=\sqrt{2}$，记 $|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，则

$$\begin{cases}|r_1-r_2|=2a=2\\ \cos 60^\circ=\dfrac{r_1^2+r_2^2-(2c)^2}{2r_1r_2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(r_1-r_2)^2=4\\ r_1r_2=r_1^2+r_2^2-4c^2\end{cases}\Rightarrow r_1r_2=4$$

所以△ F_1PF_2 的面积为 $s=\dfrac{1}{2}r_1r_2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

【实战演练】

一、达标检测

1．双曲线 $2x^2-y^2=8$ 的实轴长为 （　　）

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．4　　D．$4\sqrt{2}$

2．设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1(a>0)$的渐近线方程为$3x\pm 2y=0$，则$a$的值为　　（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

3．双曲线$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{m}=1$的离心率是方程$2x^2-11x+5=0$的根，则$m=$　　（　　）

A．36　　B．72　　C．36或72　　D．无法确定

4．已知F_1、F_2分别为双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的两个焦点，点P在双曲线上，且满足$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，则$|PF_1|\cdot|PF_2|$的值为　　（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

5．方程$\frac{x^2}{k+6}+\frac{y^2}{k-1}=1$表示双曲线，则$k$的取值范围为_____.

6．双曲线的实轴与虚轴长之比为 2:1，且有一焦点为$(2\sqrt{15},0)$，双曲线的标准方程为_____.

7．双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$的两焦点为$F_1$、$F_2$，点$P$在双曲线上，且$|PF_1|=9$，则$|PF_2|=$_____.

8．求过点（4，3），且一条渐近线方程为$x-2y=0$的双曲线标准方程.

9．点M（x，y）到定点F（5，0）距离和它到定直线l：$x=\frac{9}{5}$的距离的比是$\frac{5}{3}$.

（1）求点M的轨迹方程；

（2）设（1）中所求方程为C，在C上求点P，使$|OP|=\sqrt{34}$（O为坐标系原点）.

二、直击高考

1.（2008 年单招试题）已知双曲线的焦点在 y 轴上，$e=\frac{5}{3}$，则它的渐近线方程为（　　）

A．$y=\pm\frac{4}{3}x$　　B．$y=\pm\frac{3}{4}x$　　C．$y=\pm\frac{5}{4}x$　　D．$y=\pm\frac{4}{5}x$

2.（2011 年单招试题）已知双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 上一点 M 到右焦点 F_1 的距离为 6，N 为 MF_1 的中点，O 为坐标原点，则 $ON=$_____.

【提炼反思】

1．求双曲线的方程，首先确定焦点在哪条轴上，然后通过条件求出 a，b，c，最后根据焦点的位置写出相应的双曲线方程.

2．熟练掌握双曲线的顶点、对称轴、焦点、焦距、离心率、准线和渐近线等几何性质，离心率是一个重要的概念，记住双曲线的离心率定义、取值范围和计算方法.

第 6 讲　抛物线的标准方程和性质

【夯实基础】

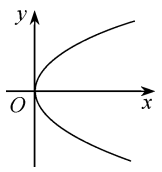
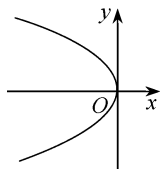
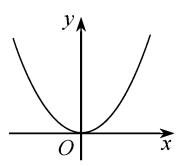
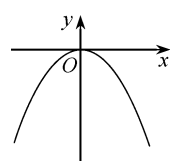
1．抛物线定义

（1）平面内到一定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线（定点不在定直线上）. 定点 F 叫做抛物线的焦点，定直线 l 叫做抛物线的准线.

（2）第二定义：平面内到定点的距离和到定直线的距离的比是常数 e（$e=1$）的点的轨迹称为抛物线.

★抛物线 $x^2=-10y$ 的焦点到准线的距离是_____.

2．抛物线的标准方程和性质（$p>0$）

图形				
标准方程	$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$-x^2=-2py(p>0)$
范围	$x\geqslant 0$	$x\leqslant 0$	$y\geqslant 0$	$y\leqslant 0$
焦点坐标	$(\frac{p}{2},0)$	$(-\frac{p}{2},0)$	$(0,\frac{p}{2})$	$(0,-\frac{p}{2})$
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
顶点	(0，0)			

续表

对称轴	x 轴	y 轴
焦半径	$r=\lvert PF\rvert=\lvert x_0\rvert+\frac{p}{2}$	$r=\lvert PF\rvert=\lvert y_0\rvert+\frac{p}{2}$
离心率	$e=1$	

★抛物线 $y^2+2x=0$ 的焦点在_____轴，开口朝_____，准线方程为_____.

（求抛物线的标准方程需要确定一个系数 p 和开口方向.）

【方法导引】

【例 8-6-1】 求适合下列条件的抛物线的标准方程：

（1）对称轴为 y 轴，并经过点（-6，-3）；

（2）以圆 $x^2+y^2-10y=0$ 的圆心为焦点；

（3）顶点在原点，准线方程为 $x=4$.

【解】（1）由题意知，抛物线的焦点在 y 轴上，且开口向下

设抛物线的方程为 $x^2=-2py$（$p>0$），将（-6，-3）代入得 $(-6)^2=-2p\times(-3)$，

解得 $p=6$，所以，所求抛物线方程为 $x^2=-12y$.

（2）因为圆心的坐标为（0，5）

所以抛物线的焦点坐标为 F（0，5），开口向上

设抛物线的方程为 $x^2=2py$（$p>0$），则 $\frac{p}{2}=5$，$p=10$

所以，所求抛物线方程为 $x^2=20y$.

（3）因为准线 $x=4$

由题意知，焦点在 x 轴上，抛物线开口向左

设抛物线方程为 $y^2=-2px$（$p>0$），则 $\frac{p}{2}=4$，$p=8$

所以 $y^2=-16x$.

【例 8-6-2】 已知抛物线顶点在原点，焦点在 y 轴上，抛物线上一点 $M(m,-3)$ 到焦点 F 的距离为 5，求 m 的值及抛物线的标准方程.

【解】因为 $M(m,-3)$ 是抛物线上的点，对称轴为 y 轴，

所以抛物线开口向下，设抛物线方程为 $x^2=-2py$（$p>0$）

又 $|MF|=5$，则点 M 到准线的距离为 5

又因为点 M 的纵坐标为−3，所以 $\frac{p}{2}=2\Rightarrow p=4$

所以抛物线方程为 $x^2=-8y$，将点 $M(m,-3)$ 代入，

得 $m=\pm2\sqrt{6}$.

【例 8-6-3】 已知抛物线 $x^2=2py$（$p>0$）的焦点与椭圆 $4x^2+2y^2=1$ 的一个焦点重合，一斜率为 -1 的动直线 l 与此抛物线交于不同的两点 B，C.

（1）求此抛物线的方程；

（2）若$|BC|\leqslant 4$，求直线 l 与 y 轴交点纵坐标的取值范围；

（3）当直线 l 过抛物线焦点 F 时，弦 BC 的垂直平分线交 BC 于 M，交 y 轴于 N，试求 $\triangle FMN$ 的面积.

【解】（1）椭圆 $4x^2+2y^2=1$ 的焦点为$(0,\ \frac{1}{2})$，$(0,\ -\frac{1}{2})$，由题意得 $\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$，即 $p=1$，

所以，该抛物线方程为 $x^2=2y$.

（2）设 $B(x_1,\ y_1)$，$C(x_2,\ y_2)$，直线 l 与 y 轴交点为$(0,\ a)$，

则直线 l 的方程可表示为 $y=-x+a$，

由 $\begin{cases}y=-x+a\\x^2=2y\end{cases}$ 得 $x^2+2x-2a=0$，根据题意 $\Delta=4+8a>0$，即 $a>-\frac{1}{2}$ ①

又 $x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=-2a$，所以

$|BC|=\sqrt{2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+8a}$，

由于$|BC|\leqslant 4$，所以 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+8a}\leqslant 4$，解得 $a\leqslant\frac{1}{2}$，再结合①式得 $-\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{1}{2}$.

（3）当直线 l 过抛物线焦点 $F(0,\ \frac{1}{2})$ 时，l 的方程为 $y=-x+\frac{1}{2}$，即 $a=\frac{1}{2}$，

M 点的坐标为$(x_M,\ y_M)$，$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=-1$，$y_M=-(-1)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

所以，BC 的垂直平分线方程为 $y-\frac{3}{2}=x+1$，令 $x=0$，得 $y=\frac{5}{2}$，即 $N(0,\ \frac{5}{2})$，

所以，$S_{\triangle FMN}=\frac{1}{2}|x_M|\cdot|NF|=1$.

【实战演练】

一、达标检测

1．抛物线 $y=-\frac{1}{6}x^2$ 的准线方程为 （　　）

A．$x=\frac{1}{24}$　　B．$x=\frac{3}{2}$　　C．$y=\frac{3}{2}$　　D．$x=-\frac{1}{24}$

2．抛物线 $y^2=8x$ 上一点 P 到 y 轴的距离为 4，则点 P 到该抛物线焦点的距离为 （　　）

A．4　　B．6　　C．8　　D．12

3．顶点在原点，对称轴为坐标轴，焦点为$(-1,\ 0)$的抛物线的标准方程为 （　　）

A．$y^2=2x$　　B．$y^2=-4x$　　C．$y^2=4x$　　D．$y^2=-2x$

4．若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{10}=1$ 的右焦点重合，则 p 的值为 （　　）

A．4　　B．-4　　C．8　　D．-8

5．抛物线 $y=4x^2$ 的焦点坐标为_____.

6．到直线 $x=-3$ 的距离比到点$(1,\ 0)$的距离大 2 的点的轨迹方程为_____.

7．求以原点为顶点，坐标轴为对称轴，且过点 $P(-2,4)$ 的抛物线方程．

8．一抛物线拱桥，跨度 40m，拱顶距水面 6m，有一竹排上载有一个宽 4m，高 5m 的大木箱，问能否通过拱桥？

二、直击高考

1．（2010 年单招试题）设斜率为 2 的直线 l 过抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点 F，且与 y 轴交于点 A，若△ OAF（O 为坐标原点）的面积为 4，则此抛物线的方程为_____．

2．（2013 年单招试题）若抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的准线与圆 $(x-3)^2+y^2=16$ 相切，则 p 的值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．4

【提炼反思】

1．求抛物线的方程，首先要确定顶点的位置、开口方向，以便准确设出方程，然后利用已知条件求出 p．

2．在审题时，如果发现题目中有动点到定点、定直线的距离，或动点到两个定点间的距离关系的条件时，可考虑利用圆锥曲线的定义来解题．

3．关于抛物线问题的求解，应注意利用平面图形的特点，数形结合的思想．

第 7 讲　直线与圆锥曲线

【夯实基础】

1．直线与圆锥曲线的位置关系

直线方程与圆锥曲线方程联立方程组，消元，化为一元二次方程，求根的判别式．

相离 $\Leftrightarrow$ 直线与圆锥曲线没有公共点 $\Leftrightarrow \Delta<0$；

相切⇔直线与圆锥曲线有且只有一个交点⇔$\Delta=0$；

相交⇔直线与圆锥曲线有两个交点⇔$\Delta>0$.

注意：

（1）直线与圆锥曲线的位置关系还可以用数形结合，以形助数的方法解决.

（2）直线与圆的位置关系，除了用上述根的判别式，还可以根据 d（圆心到直线的距离）与 r 的大小关系来判断.

★直线 $y=kx+3$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 有一个交点，则 k 的取值为_____.

2．弦长的求法（弦长公式）

设圆锥曲线 $F(x,\ y)=0$ 与 $y=kx+m$ 交于 A，B 两点，设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

联立方程组 $\begin{cases}F(x,\ y)=0\\ y=kx+m\end{cases}$.

（1）消元后得到的是关于 x 的二次方程：$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$；

（2）消元后得到的是关于 y 的二次方程：$|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$.

★直线 $y=2x-6$ 与双曲线 $x^2-y^2=4$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|$=_____.

3．弦中点问题

方法：

（1）利用判别式和韦达定理加以解决；

（2）利用点差法解决，若知道弦中点的坐标，利用“点差法”. 可得到中点弦的直线的斜率，该方法在解决有关存在性的问题时，要结合图形和根的判别式.

★已知直线 l 经过点 P（1，1），且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相交于 A、B 两点，若 P 是线段 AB 的中点，则直线 l 的方程为_____.

4．圆锥曲线中向量垂直问题

设直线交圆于 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 两点，若以 AB 为直径的圆过原点，则 $OA\perp OB$.

即 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

★已知 F_1、F_2 是双曲线 $x^2-y^2=6$ 的左、右焦点，若点 M 在双曲线的右支上且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，则点 M 的坐标为_____.

5．轨迹问题

步骤：

（1）建立适当的直角坐标系，设轨迹上任一点 P（x，y）；

（2）寻求动点与已知点的关系式；

（3）把已知点和动点用坐标表示，并代入，整理即得.

★过点（0，-4）且与直线 $y=4$ 相切的圆的圆心的轨迹方程为_____.

6．定值与最值

（1）定值：通常通过求参数和特殊值来确定“定值”是多少或者将该问题涉及的几何式转化为三角的形式.

★若 $a\in\mathbf{R}$，则直线 $(a-1)x-y+2a+1=0$ 恒过定点_____.

（2）最值：一般先根据条件列出所求目标函数关系式，然后利用不等式、一元二次函数和三角函数等求出最大或最小值.

★若实数 x，y 满足条件 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，则 $x-y+4$ 的最大值为_____.

【方法导引】

【例 8-7-1】 过椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点 F_2 作一倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线交椭圆于 A，B 两点.（1）求弦 AB 的长 ；（2）△ AOB 的面积；（3）左焦点 F_1 到弦 AB 中点的距离.

【解】（1）直线 AB 的方程为 $y=x-1$，设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$

$$由\begin{cases}y=x-1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow 7x^2-8x-8=0$$

则 $x_1+x_2=\frac{8}{7}$，$x_1x_2=-\frac{8}{7}$

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{24}{7}$

（2）**解法一：**因为点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}$

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{6\sqrt{2}}{7}$

解法二： $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle OAF_2}+S_{\triangle OBF_2}$

$$=\frac{1}{2}|OF_2|(|y_1|+|y_2|)=\frac{1}{2}|y_1-y_2|$$

$$=\frac{1}{2}|x_1-x_2|=\frac{1}{2}\times\frac{12\sqrt{2}}{7}=\frac{6}{7}\sqrt{2}$$

（3）设弦 AB 的中点为 $M(x, y)$，则 $x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4}{7}$

又因为 M 在直线 AB 上，所以 $y=x-1=\frac{4}{7}-1=-\frac{3}{7}$

因为 F_1 的坐标为 $(-1, 0)$，所以 $|FM|=\sqrt{(-1-\frac{4}{7})^2+(\frac{3}{7})^2}=\frac{\sqrt{130}}{7}$

故点 F_1 到弦 AB 中点的距离为 $\frac{\sqrt{130}}{7}$.

【例 8-7-2】 过点 A（1，1）作直线 l 与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 交于 P，Q 两点，若 A 是线段 PQ 的中点，这样的直线存在吗？

【解】解法一：设直线 l 为 $y-1=k(x-1)$

$$由\begin{cases}2x^2-y^2=2\\ y=k(x-1)+1\end{cases}\Rightarrow(2-k^2)x^2+(2k^2-2k)x-k^2+2k-3=0$$

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{(2k^2-2k)}{2-k^2}=2$，得 $k=2$

所以 $-2x^2+4x-3=0$，而 $\Delta=16-4\times(-2)\times(-3)<0$

所以不存在这样的直线.

解法二：设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，则 $\begin{cases}2x_1^{\ 2}-y_1^{\ 2}=2\\2x_2^{\ 2}-y_2^{\ 2}=2\end{cases}$

$\Rightarrow 2(x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2})=y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2}$

$2(x_1+x_2)(x_1-x_2)=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$

又因为 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=2$

所以 $2(x_1-x_2)=y_1-y_2$，即 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$

所以直线 l 的方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$

$\begin{cases}y=2x-1\\2x^2-y^2=2\end{cases}\Rightarrow 2x^2-4x+3=0$

$\Delta=16-4\times2\times3<0$

所以不存在这样的直线.

【例 8-7-3】 平面直角坐标系中，O 为坐标原点，已知两定点 $A(1,\ 0)$，$B(0,\ -1)$，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+(m-1)\overrightarrow{OB}$（$m\in\mathbf{R}$）.

（1）求点 P 的轨迹方程；

（2）设点 P 的轨迹与双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）交于相异两点 M，N，若以 MN 为直径的圆过原点，且双曲线的离心率为 $\sqrt{3}$，求双曲线 C 的方程.

【解】（1）设 $P(x,\ y)$，则 $(x,\ y)=m(1,\ 0)+(m-1)(0,\ -1)=(m,\ 1-m)$

$\begin{cases}x=m\\y=1-m\end{cases}\Rightarrow y=1-x$.

（2）因为 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$

所以 $c^2=3a^2$，$b^2=2a^2$

设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2a^2}=1$，即 $2x^2-y^2=2a^2$

$\begin{cases}y=1-x\\2x^2-y^2=2a^2\end{cases}\Rightarrow x^2+2x-1-2a^2=0$

设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，$x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=-1-2a^2$

以 MN 为直径的圆过原点，所以 $OM\perp ON$

即 $x_1x_2+y_1y_2=0$，而 $y_1y_2=(1-x_1)(1-x_2)=2-2a^2$

所以 $-1-2a^2+2-2a^2=0$，得 $a^2=\dfrac{1}{4}$，$b^2=\dfrac{1}{2}$ 经检验，符合

所以双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$，即 $4x^2-2y^2=1$.

【例 8-7-4】 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l 过点 M（4，0）.

（1）若点 F 到直线 l 的距离为 $\sqrt{3}$，求直线 l 的斜率；

（2）设 A，B 为抛物线上两点，且直线 AB 不与 x 轴垂直，若线段 AB 的垂直平分线恰好过点 M，求证：线段 AB 的中点的横坐标为定值.

（1）**【解】** 若 k 不存在，不合题意，则

设直线的方程为 $y-0=k(x-4)$，即 $kx-y-4k=0$

$$\frac{|k-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}\Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-2\sqrt{2}$ 或 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2\sqrt{2}$

（2）【证明】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，中点 $N(x_0,y_0)$，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$

$$\begin{cases}y=kx+m\\y^2=4x\end{cases}\Rightarrow k^2x^2+(2km-4)x+m^2=0$$

$$x_1+x_2=\frac{4-2km}{k^2},x_1x_2=\frac{m^2}{k^2},\quad x_0=\frac{2-km}{k^2},y_0=k\times\frac{2-km}{k^2}+m=\frac{2}{k},$$

线段 AB 的中垂线方程：$y-\frac{2}{k}=-\frac{1}{k}(x-\frac{2-km}{k^2})$，

而线段 AB 的中垂线过 M（4，0）

$\therefore 0-\frac{2}{k}=-\frac{1}{k}(4-\frac{2-km}{k^2})$，$2=4-\frac{2-km}{k^2}$，即 $\frac{2-km}{k^2}=2$，

即 $x_0=\frac{2-km}{k^2}=2$

所以线段 AB 的中点的横坐标为定值 2.

【实战演练】

一、达标检测

1．直线 $y=x+1$ 与椭圆 $2x^2+3y^2=6$ 的交点个数 （　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．无法确定

2．经过椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点，且垂直于 y 轴的弦长 （　　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{8}{3}$　　C．$\frac{16}{3}$　　D．$\frac{32}{3}$

3．已知抛物线 $y^2=4x$，直线 l 与抛物线交于 A、B 两点，若线段 AB 的中点坐标为 $M(1,\frac{1}{2})$，则直线 AB 的方程为 （　　）

A．$x-4y-1=0$　　B．$8x-2y-7=0$

C．$x+4y-3=0$　　D．$8x+2y-9=0$

4．直线与双曲线只有一个交点是直线与双曲线相切的 （　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．若直线 $y=kx+2$ 与焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{y^2}{m}+\frac{x^2}{5}=1$ 恒有交点，则实数 m 的取值范围_____.

6．过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点的直线与抛物线交于 A、B 两点，若 $x_A+x_B=3$，则 $|AB|$=_____.

7．已知直线 $y=x+b$ 被椭圆 $4x^2+y^2=1$ 截得的弦长为 $\frac{2}{\sqrt{5}}$，求实数 b 的值.

8．已知双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 的焦距为 $2\sqrt{7}$，一直线 $y=x+1$ 与双曲线交于 M、N 两点，且线段 MN 的中点的纵坐标为 $-\frac{2}{3}$，求双曲线的标准方程.

9．已知抛物线 C：$y=2x^2$，直线 $y=kx+2$ 交于 A，B 两点，M 是线段 AB 的中点，过 M 作 x 轴的垂线交抛物线 C 于点 N.

（1）求抛物线 C 的准线和焦点坐标；

（2）若 $k=1$，求点 N 的坐标；

（3）是否存在实数 k，使 $AN\perp BN$？若存在，求出 k，若不存在，说明理由.

二、直击高考

1．（2009 年单招试题）已知双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm 3x$，其中一个焦点为

$F_1(-\sqrt{10},0)$.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）是否存在过点 $B_1(0,3)$ 的直线 l，使得 l 与双曲线 C 交于 A、B 两点，且以 AB 为直径的圆过点 $B_2(0,-3)$？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由.

2.（2012 年单招试题）已知椭圆 C：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{2}{3}$，且该椭圆上的点到右焦点的距离的最大值为 5.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设椭圆 C 的左右顶点分别为 A，B，且过点 $D(9,m)$ 的直线 DA，DB 与椭圆的另一个交点分别为 M、N，其中 $m\neq 0$，求证：直线 MN 必过一定点（其坐标与 m 无关）.

【提炼反思】

1．直线与圆锥曲线的位置关系，是单招考试考查的重点内容，常以较高难度的综合题出现．考题常以直线与圆锥曲线的方程为基础，结合有关概念（如焦点、弦长、准线）及计算，将位置关系转化为相应方程或方程组的解的讨论来研究.

2．直线与圆锥曲线的位置关系，常见题型有弦长问题、图形对称、参数问题、最值、定值问题等．解题时要注重常规解法，在数形结合的基础上辩证地求解.

第 8 讲　坐标轴平移和参数方程

【夯实基础】

1．坐标轴平移

（1）概念：只改变坐标原点的位置，而不改变坐标轴方向和单位长度的坐标系变换.

（2）坐标轴平移公式：xOy 平移得到新坐标 $x'O'y'$，O' 在原坐标系 xOy 中的坐标为（x_0，y_0），则 $\begin{cases}x'=x-x_0\\y'=y-y_0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=x'+x_0\\y=y'+y_0\end{cases}$.

（其中，（x，y）为点在坐标系 xOy 中的坐标，（x'，y'）为点在坐标系 $x'O'y'$ 中的坐标）.

★将坐标原点移至 $O'(2,1)$，则点（3，−2）在新坐标系中的坐标为_____.

2．化简曲线方程 $f(x,y)=0$ 的两种常用方法

（1）代入法：将平移公式 $\begin{cases}x=x'+x_0\\y=y'+y_0\end{cases}$ 代入 $f(x,y)=0$，令一次项系数或常数项等于零，从而确定 x_0，y_0 的值，然后代回即可.

（2）配方法：对于缺 xy 项的曲线方程 $f(x,y)=0$，可通过对 x，y 分别配方后，确定平移公式 $\begin{cases}x'=x-x_0\\y'=y-y_0\end{cases}$，然后将 $f(x,y)=0$ 化简.

★利用坐标轴平移，曲线 $x^2+4y^2-2x-16y+1=0$ 化简得_____.

3．参数方程

一般地，如果曲线上任意一点 $P(x,y)$ 的坐标 x，y 都可以用一个变量 t 的函数来表示：$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$，则称这个方程是曲线的参数方程，变量 t 叫做参数.

（1）经过点 $P(x_0,y_0)$，且倾斜角为 α 的直线参数方程：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\cos\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）.

（2）圆心为（a，b），半径为 r 的圆的参数方程：$\begin{cases}x=a+r\cos\alpha\\y=b+r\cos\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）.

★以（4，1）为圆心，半径为 2 的圆的参数方程为_____.

4．参数方程的不唯一性

（1）曲线的参数方程，随着参数选取的不同，得到的参数方程是不一致的，但是当参数确定下来后，得到的参数方程是唯一的.

（2）在参数方程中，若选定了参数，可将曲线的普通方程化为参数方程，反之，若消去参数，也可将参数方程化为普通方程，这就是参数方程与普通方程之间的互化.

★直线 $x+y=2$，若 $x=t$，则直线的参数方程为_____，若 $x=2t$，则参数方程为_____.

5．消参数常用的方法

（1）代入法：由一个方程解出参数，代入另一个方程中去消去参数；

（2）三角法：利用三角恒等式消去参数；

（3）整体消元法：根据参数本身的结构特征，从整体上消去参数.

注意：并不是所有的参数方程都能转化为普通方程.

★将参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\cos\alpha-3\\y=\dfrac{1}{2}\sin\alpha+1\end{cases}$ 化为普通方程_____.

【方法导引】

【例 8-8-1】 平移坐标轴，将坐标原点移至（3，1）.

（1）求点 A（−2，5）在新坐标系中的坐标；

（2）若点 B 在新坐标系中的坐标为 B（0，−1），求点 B 在原坐标系中的坐标；

【解】（1）将原坐标系中点 A 代入坐标轴平移公式，有

$$\begin{cases}-2=x'+3\\5=y'+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=-5\\y'=4\end{cases}$$

即点 A（−2，5）在新坐标系中的坐标为（−5，4）.

（2）将新坐标 B（0，−1）代入坐标轴平移公式，有 $\begin{cases}x=0+3=3\\y=-1+1=0\end{cases}$

即点 B 在原坐标系中的坐标为（3，0）.

【例 8-8-2】 利用坐标轴平移，化简曲线方程 $x^2+y^2-6x+4y-12=0$.

【解】解法一：将原方程分别按 x，y 配方，得到 $(x-3)^2+(y+2)^2=25$

令 $\begin{cases}x'=x-3\\y'=y+2\end{cases}$，得 $x'^2+y'^2=25$.

解法二：设坐标轴平移公式为 $\begin{cases}x'=x-x_0\\y'=y-y_0\end{cases}$；

代入原方程 $(x'+x_0)^2+(y'+y_0)^2-8(x'+x_0)+4(y'+y_0)-12=0$　　①

化简得 $x'^2+y'^2+2(2x_0-6)x'+(2y_0+4)y'+(x_0^2+y_0^2-6x_0+4y_0-12)=0$ ②

令 $\begin{cases}2x_0-6=0\\2y_0+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=3\\y_0=-2\end{cases}$ 代入②得 $x'^2+y'^2=25$.

【例 8-8-3】 平移坐标轴，把原点移至 $O'(-2,1)$，求下列曲线在新坐标系中的方程：

（1）$5x-4y=0$；（2）$x^2+6x-2y+11=0$.

【解】（1）将 $\begin{cases}x=x'-2\\y=y'+1\end{cases}$ 代入原方程 $5x-4y=0$，得 $5x'-4y'-14=0$.

（2）设曲线上任意一点在新坐标系中的坐标为（x'，y'），将 $\begin{cases}x=x'-2\\y=y'+1\end{cases}$ 代入原方程 $x^2+6x-2y+11=0$，得到 $(x'+1)^2-2y'=0$.

【例 8-8-4】 将下列参数方程化为普通方程：

（1）$\begin{cases}x=1+t\\y=2+3t\end{cases}$（$t$ 为参数）；（2）$\begin{cases}x=\dfrac{1}{1+t^2}\\y=\dfrac{t}{1+t^2}\end{cases}$（$t$ 为参数）；（3）$\begin{cases}x=3\cos\alpha\\y=4\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）.

【解】（1）（代入法）由 $x=1+t$ 得 $t=1+x$ 代入 $y=2+3t$，即 $y=3x-1$.

（2）（整体消元法）由题知：$\dfrac{y}{x}=t$，将其代入 $x=\dfrac{1}{1+t^2}$，得 $x=\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}$，得

$x^2+y^2-x=0$.

（3）（三角法）由题可知$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{3}\\ \sin\alpha=\dfrac{y}{4}\end{cases}$，利用$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，代入化简得

$(\frac{x}{3})^2+(\frac{y}{4})^2=1$，

即$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

【实战演练】

一、达标检测

1．平移坐标轴后，不发生变化的是（　　）

A．点的坐标　　B．曲线的方程

C．点的方程和曲线的坐标　　D．曲线的形状

2．平移坐标轴，将坐标原点移至$O'(-1,1)$，则$x'^2+y'^2+2x'-2y'+1=0$在原坐标系中的方程为（　　）

A．$(x+2)^2+(y-2)^2=1$　　B．$(x-2)^2+(y-2)^2=1$

C．$(x+2)^2+(y+2)^2=1$　　D．$(x-2)^2+(y+2)^2=1$

3．过点（0，−2）且倾斜角为$\frac{\pi}{3}$的直线的参数方程为（　　）

A．$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\dfrac{1}{2}t-2\end{cases}$　　B．$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t-2\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$

C．$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-2\\ y=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$　　D．$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-2\end{cases}$

4．曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{2}t\\ y=-t-2\end{cases}$（$t$为参数），则以下各点在曲线$C$上的点为（　　）

A．（1，−3）　　B．$(\sqrt{2}-2,1)$

C．$(1,\sqrt{2}-2)$　　D．$(\sqrt{2},-3)$

5．直线$\begin{cases}x=3+t\sin20^\circ\\ y=-2+t\cos20^\circ\end{cases}$（$t$为参数）的倾斜角为_____.

6．平移坐标轴，将曲线$(x+3)^2+(y-2)^2=16$化简，则新坐标系的原点在原坐标系中的坐标为_____.

7．将下列参数方程化为普通方程：

（1）$\begin{cases}x=t\\ y=2+3t^2\end{cases}$（$t$为参数）；　　（2）$\begin{cases}x=\cos\alpha\\ y=\sin^2\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数，$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$）；

（3）$\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{1+m^2} \\ y=1+\dfrac{m}{1+m^2} \end{cases}$（$m$ 为参数）.

8．若实数 x，y 满足方程 $x^2+y^2-2y-1=0$，求 $z=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y$ 的取值范围.

【提炼反思】

1．坐标系的思想是现代数学最重要的思想之一，坐标系是联系代数与几何的桥梁．坐标轴平移是一种坐标变换，要熟练运用平移公式解题．

2．参数方程是曲线上动点位置的另一种表示形式，它借助于中间变量把曲线上动点的两个坐标间接地联系起来．参数方程实质上是一个方程组，其中 x，y 分别是曲线上的动点的横坐标与纵坐标．对于参数的每一个允许值，都确定曲线上的一个点．

3．在曲线的参数方程与普通方程互化时，要注意二者的等价性．必须确定参数的取值范围及相应的 x，y 的取值范围，使互化前后的两个方程表示同一曲线．将参数方程化为普通方程的基本思路是消去参数，将普通方程化为参数方程的关键是选择适当的参数．

专题九　立体几何

【思维导航】

- 立体几何
 - 平面及其基本性质
 - 平面的概念
 - 平面的性质：三个公理
 - 三个推论
 - 空间两条直线的位置关系
 - 位置关系：两直线相交、两直线平行、异面直线
 - 等角定理、平行公理
 - 异面直线所成角
 - 直线与平面的位置关系
 - 直线与平面的位置关系：直线在平面内、平行、相交
 - 直线与平面平行：判定与性质
 - 直线与平面垂直：判定与性质
 - 直线与平面所成角
 - 点到平面、直线到平面的距离
 - 平面与平面的位置关系
 - 平面与平面的位置关系：平行、相交
 - 平面与平面平行：判定与性质
 - 平面与平面垂直：判定与性质
 - 二面角
 - 平行平面之间的距离
 - 柱、锥、球及其组合体
 - 棱柱：重点是直棱柱、正棱柱
 - 棱锥：重点是正棱锥
 - 圆柱
 - 圆锥
 - 球

【考点梳理】

考　　点	要　　求
平面及其基本性质	了解
空间两条直线的位置关系	了解
直线与平面的位置关系	了解
平面与平面的位置关系	了解
柱、锥、球及其组合体	了解

第 1 讲　点、线、面的位置关系

【夯实基础】

1．平面

（1）平面的概念．

“平面”是从现实生活中的桌面、平静的水面等物体抽象出来的，平面没有厚薄，具有无限延展性，通常用平行四边形表示．平面用希腊字母 α，β，γ ……来表示，也可以用表示平面的平行四边形的顶点或对角顶点的字母来表示．

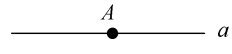
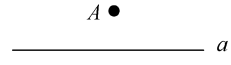
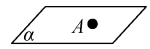
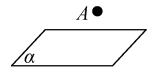
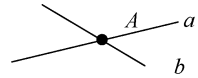
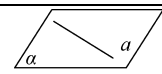
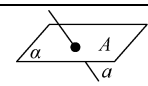
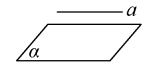
★三个不重合的平面，把空间分成（　　）部分．

A．6 个　　B．8 个

C．6 个或 8 个　　D．4 个或 6 个或 7 个或 8 个

（2）点、直线、平面的基本位置关系．

空间图形可以看作是空间点的集合，点、线、面的基本位置关系可用集合的关系来表示．

文字语言	符号表示	图形表示
点 A 在直线 a 上	$A \in a$	
点 A 不在直线 a 上	$A \notin a$	
点 A 在平面 α 上	$A \in \alpha$	
点 A 不在平面 α 上	$A \notin \alpha$	
直线 a，b 交于 A 点	$a \cap b = A$	
直线 a 在平面 α 内	$a \subset \alpha$	
直线 a 在平面 α 外	$a \not\subset \alpha$	 

（3）平面的基本性质．

① 如果一条直线上有两个点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内．

② 如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过该点的公共直线．

若两个平面有一条公共直线，则称这两个平面相交，这条公共直线叫做这两个平面的交线．

③ 经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面．

推论 1：一条直线和这条直线外的一点可以确定一个平面.

推论 2：两条相交直线可以确定一个平面.

推论 3：两条平行直线可以确定一个平面.

★下列说法中，正确的是 （ ）

A．三个点一定能确定一个平面　　B．四边形一定是平面图形

C．梯形一定是平面图形　　D．六边形一定是平面图形

★下列条件中，可以确定一个平面的是 （ ）

A．两条直线　　B．相交于一点的两条直线

C．相交于同一点的三条直线　　D．三条不相交的直线

2．空间两条直线的位置关系

（1）位置关系.

空间两条直线的位置关系 $\begin{cases}\text{共面}\begin{cases}\text{相交（有一个公共点）}\\\text{平行（无公共点）}\end{cases}\\\text{异面（无公共点）}\end{cases}$

★两条异面直线是指 （ ）

A．空间无公共点的两条直线　　B．分别在两个不同平面的两条直线

C．不同在任何一个平面内的两条直线　　D．平面内一条直线和平面外的一条直线

★没有公共点的两条直线的位置关系是 （ ）

A．异面　　B．平行　　C．平行或异面　　D．不确定

★分别和两条异面直线都相交的两条直线 （ ）

A．一定是异面直线　　B．不可能是平行直线

C．不可能是相交直线　　D．可能是平行直线

（2）平行公理.

平行于同一条直线的两条直线互相平行.

（3）等角定理.

如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

★直线 a，b 都垂直于直线 c，那么 a 与 b 的位置关系是 （ ）

A．平行　　B．相交

C．异面　　D．平行或相交或异面

（4）异面直线所成的角.

设 m 与 n 是异面直线，经过空间任一点 O，作直线 $m'/\!/m$，$n'/\!/n$，m' 与 n' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 m、n 所成的角，异面直线所成的角的范围是$(0,\frac{\pi}{2}]$.

★两条直线所成角的范围是_____.

（5）两条异面直线垂直.

两条异面直线 m，n 所成的角为直角，则称这两条异面直线垂直，记作 $m\perp n$.

★已知直线 $a\perp b$，$a/\!/c$，则 b 与 c 的关系是_____.

3．直线与平面的位置关系

（1）位置关系.

位 置 关 系	公共点情况	记　　法
直线在平面内	直线上所有的点都在平面内	直线 l 在平面 α 内，记作 $l\subset\alpha$
直线与平面平行	无公共点	直线 l 与平面 α 平行，记作 $l/\!/\alpha$
直线与平面相交	有且只有一个公共点	直线 l 与平面 α 相交，记作 $l\cap\alpha=A$

★已知直线 $l/\!/\alpha$，直线 $a\subset\alpha$，则 l 与 a 的位置关系是　　（　　）

A．平行　　B．异面　　C．相交　　D．平行或异面

（2）线面平行.

① 判定定理：如果平面外的一条直线和这个平面内一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

② 性质定理：如果一条直线和一个平面平行，并且经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行.

★若直线 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$，则 a 与 b 的位置关系是_____.

（3）直线与平面垂直的定义.

如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，那么直线 l 与平面 α 相互垂直，记作 $l\perp\alpha$，直线与平面垂直是直线与平面相交中的特殊情况.

（4）线面垂直.

① 判定定理：若一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线与这个平面垂直.

② 性质定理：如果两条直线垂直于同一个平面，那么这两条直线平行.

★直线 a 与平面 α 内的两条直线都垂直，则 a 与 α 的位置关系是　　（　　）

A．垂直　　B．平行

C．斜交　　D．上述都有可能

★如图 9-1-1 所示，已知矩形 $ABCD$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，图中直角三角形的个数为（　　）

A．1 个　　B．2 个

C．3 个　　D．4 个

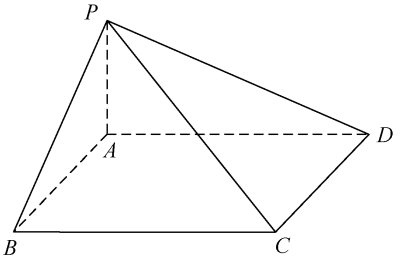


图 9-1-1

（5）直线和平面所成的角.

平面的斜线与它在平面内的射影所成的锐角，叫做斜线与平面所成的角．直线垂直于平面时，直线与平面所成的角为直角；直线平行于平面或直线在平面内时它们所成的角为 0°．直线与平面所成角的范围为 $[0,\frac{\pi}{2}]$.

★若两条直线与一平面所成的角相等，则这两条直线的位置关系是　　（　　）

A．平行　　B．相交　　C．异面　　D．以上均有可能

4．平面与平面的位置关系

（1）位置关系.

位置关系	公共部分情况	记　　法
相　交	有且仅有一条公共直线	平面 α，β 相交于直线 a，记作 $\alpha\cap\beta=a$
平　行	无公共点	平面 α，β 平行，记作 $\alpha/\!/\beta$

（2）平面与平面平行.

① 判定定理：如果一个平面内的两条相交直线分别平行于另一平面，那么这两个平面互相平行.

如果一个平面内的两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条相交直线，那么这两个平面平行.

★下列条件中，不能判断两个平面平行的是_____.（填序号）

① 一个平面内的一条直线平行于另一个平面；

② 一个平面内的两条直线平行于另一个平面；

③ 一个平面内有无数条直线平行于另一个平面；

④ 一个平面内任何一条直线都平行于另一个平面.

② 性质定理：如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

★已知平面 $\alpha//\beta$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则直线 a，b 是 （ ）

A．平行直线　　B．异面直线　　C．相交直线　　D．不是相交直线

（3）二面角及二面角的平面角.

由一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，这个直线叫做二面角的棱，每个半平面叫做二面角的面.

以二面角棱上任意一点 O 为端点，在两个半平面内分别作棱的垂线 OA、OB，则 $\angle AOB$ 叫做二面角的平面角.

二面角的大小用它的平面角来度量，二面角的大小范围为 $[0,\pi]$.

★下列说法错误的是 （ ）

A．二面角的棱必垂直于这个二面角的平面角所在的平面.

B．二面角的平面角的大小与它的顶点在二面角的棱上的位置无关.

C．以二面角的棱上一点为端点在两个面内分别引射线，则两条射线所成的角中，最小的角与二面角的平面角相等.

D．二面角的大小，可用它的平面角来度量.

★在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，二面角 $D_1-A_1C-B_1$ 的度数是 （ ）

A．45°　　B．60°　　C．120°　　D．135°

（4）平面与平面垂直.

① 定义：平面角是直角的二面角叫做直二面角，此时两个平面互相垂直，记作 $\alpha\perp\beta$.

② 判定定理：如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

③ 性质定理：如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直交线的直线垂直于另一个平面.

★若平面 α ⊥平面 β，又直线 $m\subset\alpha$，直线 $l\subset\beta$，且 $m\perp l$，则正确的是 （ ）

A．$m\perp\beta$　　B．$l\perp\alpha$

C．$m\perp\beta$ 且 $l\perp\alpha$　　D．$m\perp\beta$ 或 $l\perp\alpha$

★a，b，c，d 表示不同直线，α，β，γ 表示不同平面，下列推理正确的是 （ ）

A．若 $a\perp c$，$b\perp c$，则 $a//b$

B．若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha//\beta$

C．若 $a\perp b$，$b\perp\alpha$，则 $a//\alpha$

D．若 $\alpha\perp d$，$\beta\perp d$，则 $\alpha//\beta$

★下列命题中，正确的是　　（　　）

A．如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直．

B．如果一个平面内两条直线都平行于另一平面，那么这两个平面平行．

C．如果两条直线都平行于同一平面，那么这两条直线平行．

D．如果一条直线上有两个点到一个平面的距离相等，那么这条直线和这个平面平行．

★不同直线 m、n 和不同平面 α、β，给出下列命题：

① $\left.\begin{matrix}\alpha // \beta \\ m \subset \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow m // \beta$　　② $\left.\begin{matrix}m // n \\ m // \beta\end{matrix}\right\} \Rightarrow n // \beta$

③ $\left.\begin{matrix}m \subset \alpha \\ n \subset \beta\end{matrix}\right\} \Rightarrow m$，$n$ 异面　　④ $\left.\begin{matrix}\alpha \perp \beta \\ m // \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow m \perp \beta$

其中假命题有　　（　　）

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

【方法导引】

【例 9-1-1】 如图 9-1-2 所示，在正四面体 $ABCD$ 中，E 是棱 BC 的中点，求异面直线 AE 和 BD 所成角的余弦值．

【解】取 CD 的中点 F，连接 EF、AF

∵ E 是 BC 的中点

∴ EF 是 $\triangle CBD$ 的中位线

∴ $EF \ // \ BD$

∴ $\angle AEF$ 就是异面直线 AE 和 BD 所成的角

设正四面体的棱长为 a，则 $AE = AF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$EF = \dfrac{a}{2}$

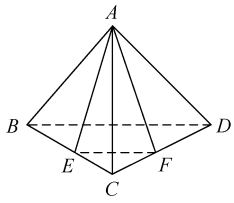


图 9-1-2

在 $\triangle AEF$ 中，由余弦定理得

$$\cos \angle AEF = \frac{AE^2 + EF^2 - AF^2}{2 \cdot AE \cdot EF} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

∴异面直线 AE 和 BD 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．

【例 9-1-2】 如图 9-1-3 所示，在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\angle ABC = 90°$，$SA \perp$ 平面 ABC，$AM \perp SB$，$AN \perp SC$．

求证：（1）$BC \perp$ 平面 SAB；（2）$AM \perp$ 平面 SBC；（3）$SC \perp MN$．

【证明】（1）∵ $SA \perp$ 面 ABC，$BC \subset$ 面 ABC

∴ $SA \perp BC$

∵ $BC \perp AB$，$SA \cap AB = A$

∴ $BC \perp$ 面 SAB．

（2）∵ $BC \perp$ 面 SAB，$AM \subset$ 面 SAB

∴ $BC \perp AM$

∵ $AM \perp SB$，$SB \cap BC = B$

∴ $AM \perp$ 面 SBC．

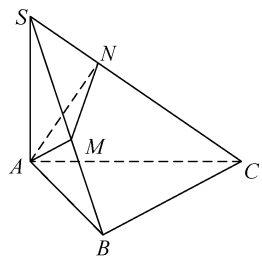


图 9-1-3

（3）∵ $AM \perp$ 面SBC，$SC \subset$ 面SBC

∴ $AM \perp SC$

∵ $SC \perp AN$， $AM \cap AN = A$

∵ $SC \perp$ 面AMN

∴ $SC \perp MN$.

【例 9-1-3】 如图 9-1-4 所示，三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$， D 是 BC 上一点，且 A_1B // 平面 AC_1D， D_1 是 B_1C_1 的中点，求证：平面 A_1BD_1 // 平面 AC_1D.

【证明】 连接 A_1C 交 AC_1 于点 E

∵四边形 A_1ACC_1 是平行四边形，

∴ E 是 A_1C 的中点，连接 ED，

∵ A_1B // 平面 AC_1D，

平面 $A_1BC \cap$ 平面 $AC_1D = ED$，

∴ A_1B // ED.

∵ E 是 A_1C 的中点，

∴ D 是 BC 的中点.

又∵ D_1 是 B_1C_1 的中点，

∴在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， BD_1 // C_1D， A_1D_1 // AD，

又 $A_1D_1 \cap BD_1 = D_1$， $AD \cap C_1D = D$，

∴平面 A_1BD_1 // 平面 AC_1D.

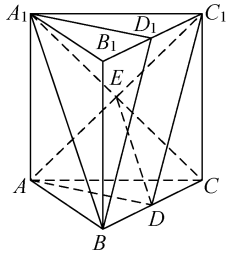


图 9-1-4

【例 9-1-4】 正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在平面垂直，$AB=\sqrt{2}$，AF=1，M 是线段 EF 的中点。

（1）求证： AM // 平面 BDE；

（2）求二面角 $A - DF - B$ 的大小.

（1）**【证明】** 如图 9-1-5 所示，设 AC 与 BD 的交点为 O，连接 OE.

因为 O、M 分别是 AC、EF 的中点，$ACEF$ 是矩形，

所以四边形 $AOEM$ 是平行四边形，

所以 AM // OE

因为 $OE \subset$ 平面 BDE， $AM \not\subset$ 平面 BDE，

所以 AM // 平面 BDE.

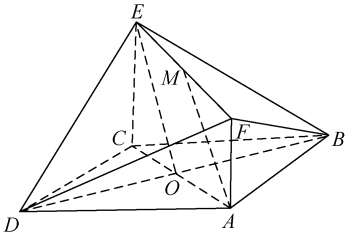


图 9-1-5

（2）**【解】** 如图 9-1-6 所示，在平面 AFD 中过 A 作 $AS \perp DF$，垂足为 S，连接 BS.

∵ $AB \perp AF$， $AB \perp AD$， $AD \cap AF = A$

∴ $AB \perp$ 平面 ADF

∴ $AB \perp DF$， $AB \cap AS = A$

∴$DF \perp$ 面ABS

∴ $BS \perp DF$

∴ $\angle BSA$ 是二面角 $A - DF - B$ 的平面角.

在 Rt$\triangle ASB$ 中， $AS = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$， $AB = \sqrt{2}$

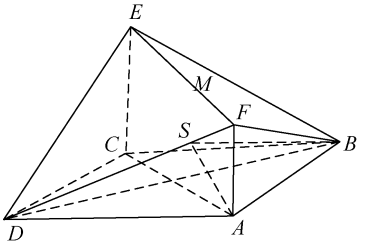


图 9-1-6

$\therefore \tan \angle ASB=\sqrt{3}$，$\angle ASB=60^\circ$

$\therefore$二面角 $A-DF-B$ 的大小为 60°．

【实战演练】

一、达标检测

1．a、b 是直线，α、β 是平面，下列判断正确的是（　　）

A．a 垂直于 α 内无数条直线，则 $a\perp\alpha$

B．$a\perp b$，$b\perp\alpha$，则 $a/\!/\alpha$

C．$a/\!/\alpha$，$b\perp\alpha$，则 $a\perp b$

D．若 $a/\!/\alpha$，$\alpha/\!/\beta$，则 $a/\!/\beta$

2．在空间四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC=2$，E、F 分别是 AB、CD 的中点，$EF=\sqrt{3}$，则 AD、BC 所成的角为（　　）

A．30°　　B．60°　　C．90°　　D．120°

3．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱 BC 与 BB_1 的中点分别为 E、F，则异面直线 AB_1 与 EF 所成的角为（　　）

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．90°

4．如图 9-1-7 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是侧面 B_1BCC_1 内一动点，若 P 到直线 BC 与到直线 C_1D_1 的距离相等，则动点 P 的轨迹所在的曲线是（　　）

A．直线　　B．圆

C．抛物线　　D．双曲线

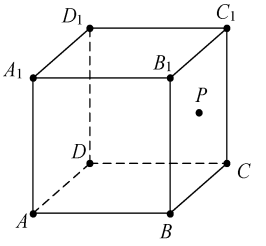


图 9-1-7

5．PA 垂直于△ABC 所在的平面，若 $AB=AC=13$，$BC=10$，$PA=12$，则 P 到 BC 的距离为_____．

6．山坡与水平面成 30° 角，坡面上有一条与坡角水平线成 30° 角的直线小路，某人沿小路上坡走了一段路程后升高了 100 m，则此人行走的路程为_____m．

7．把正三角形 ABC 沿着高 AD 折成直二面角，则折后$\angle BAC$ 的余弦值是_____．

8．如图 9-1-8 所示，已知△ABC 中 $\angle ACB=90^\circ$，$SA\perp$面 ABC，$SC\perp AD$，求证：$AD\perp$面 SBC．

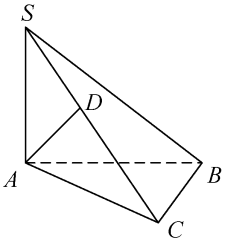


图 9-1-8

9．如图 9-1-9 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧棱 $PD\perp$底面 $ABCD$，$PD=DC$，E 是 PC 的中点，作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F．

（1）证明：PA //平面 EDB；

（2）证明：$PB \perp$ 平面 EFD.

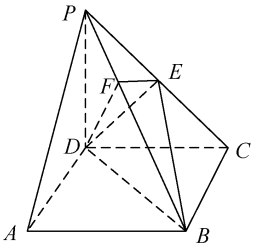


图 9-1-9

10．如图 9-1-10 所示，$PA \perp$ 矩形$ABCD$所在的平面，M、N分别是AB、PC 的中点.

（1）求证：MN // 平面PAD；（2）求证：$MN \perp CD$；

（3）若 $\angle PDA = 45°$, 求证：$MN \perp$ 平面PCD.

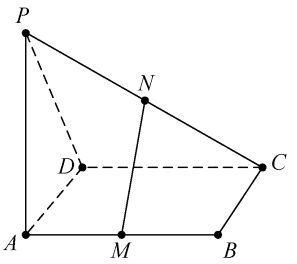


图 9-1-10

二、直击高考

1．（2011 年单招试题）对于直线 m 和平面 α、β，其中 m 在 α 内，“$\alpha // \beta$”是“$m // \beta$”的 （　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

2．（2013 年单招试题）若一圆锥的侧面展开图是半圆，则其母线与底面所成角的大小是（　　）

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．75°

3．（2013 年单招试题）如图 9-1-11 所示，在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面边长为 2，侧棱长为 $\sqrt{3}$，D 是 AC 的中点.

（1）求三棱锥 $A_1 - ABC$ 的体积；

（2）求证：直线 B_1C // 平面 A_1BD；

（3）求二面角 $A_1 - BD - A$ 的大小.

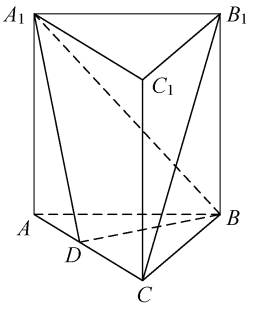
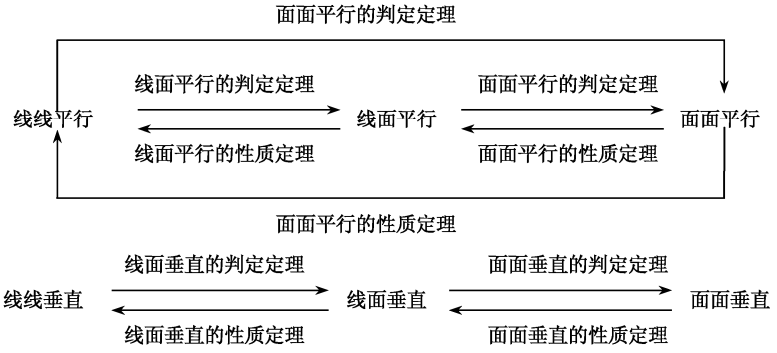


图 9-1-11

【提炼反思】

空间中的线线、线面、面面位置关系主要掌握平行与垂直两种特殊的位置关系，要注意它们之间的相互转化：



第2讲　柱、锥、球及其组合体

【夯实基础】

1．棱柱

有两个面互相平行，其余每相邻两个面的交线互相平行的多面体叫做棱柱．侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱，侧棱不垂直于底面的棱柱叫做斜棱柱，底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱．

2．棱锥

有一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形的多面体叫做棱锥．如果棱锥的底面是正多边形，并且顶点在底边面内的射影是正多边形的中心，这样的棱锥叫做正棱锥．

3．圆柱、圆锥

将矩形、直角三角形分别绕着它的一边、一直角边所在的直线旋转一周，形成的几何体分别叫做圆柱、圆锥．

4．球

将半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周，形成的几何体叫做球．

★下列命题正确的是_____．（填序号）

（1）直四棱柱是长方体；

（2）底面是正三角形的棱锥是正三棱锥；

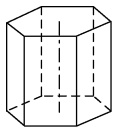
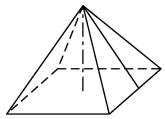
（3）正棱锥的侧面是等腰三角形；

（4）{棱柱} ⊃ {直棱柱} ⊃ {正棱柱} ⊃ {长方体} ⊃ {正方体}；

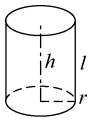
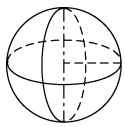
（5）正棱锥的侧棱和底面所成角相等．

5．简单几何体的侧面积和体积

（1）多面体

名　称	图　形	侧面积	体　积	备　注
直棱柱		$S_{侧}=ch$	$V=S_{底}h$ （适用于一般棱柱）	c：底面周长 h：高
正棱锥		$S_{侧}=\frac{1}{2}ch'$	$V=\frac{1}{3}S_{底}h$ （适用于一般棱锥）	h'：斜高 c：底面周长 h：高

（2）旋转体

名　称	图　形	侧面积	体　积	备　注
圆柱		$S_{侧}=2\pi rl$	$V=\pi r^2h$	h：高 r：底面半径 l：母线长
圆锥		$S_{侧}=\pi rl$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$	h：高 r：底面半径 l：母线长
球		$S=4\pi R^2$	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$	R：球的半径

★已知正方体的棱长为 1，则其表面积为_____，体积为_____.

★已知正三棱柱底面边长为 2，高为 4，则其侧面积为_____，体积为_____.

★已知圆柱的底面半径为 1，高为 2，则其侧面积为_____，体积为_____.

★已知球的半径为 2，则它的表面积为_____，体积为_____.

★底面边长和侧棱长都是 1 的正三棱柱的表面积是_____.

★已知圆柱的轴截面是一个面积为 4 的正方形，则圆柱的侧面积是_____.

【方法导引】

【例 9-2-1】 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AA_1=2$，E 为棱 CC_1 的中点.

（1）求证：$B_1D_1\perp AE$；

（2）求证：AC // 平面 B_1DE；

（3）求三棱锥 $A-BDE$ 的体积.

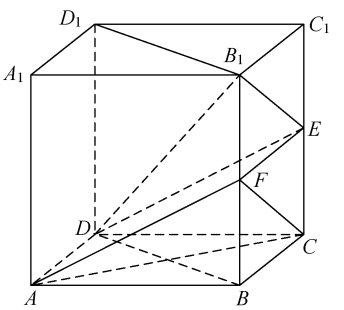


图 9-2-1

（1）**【证明】**如图 9-2-1 所示，连接 BD，则 BD // B_1D_1，

∵ $ABCD$ 是正方形，

∴ $AC\perp BD$.

∵ $CE \perp$ 面 $ABCD$，

∴ $CE \perp BD$．

又 $AC \cap CE = C$，

∴ $BD \perp$ 面 ACE．

∵ $AE \subset$ 面 ACE，

∴ $BD \perp AE$，

∴ $B_1D_1 \perp AE$．

（2）【**证明**】设 BB_1 的中点为 F，连接 AF，CF，EF．

∵ E、F 是 CC_1，BB_1 的中点，

∴ $CE \overset{//}{=} B_1F$，

∴四边形 B_1FCE 是平行四边形，

∴ $CF // B_1E$．

∵ E，F 是 CC_1，BB_1 的中点，

∴ $EF \overset{//}{=} BC$，

又 $BC \overset{//}{=} AD$，

∴ $EF \overset{//}{=} AD$．

∴四边形 $ADEF$ 是平行四边形，

∴ AF // ED

∵ $AF \cap CF = F$，$B_1E \cap ED = E$，

∴平面 ACF // 平面 B_1DE．

又 $AC \subset$ 平面 ACF，

∴ AC // 面 B_1DE．

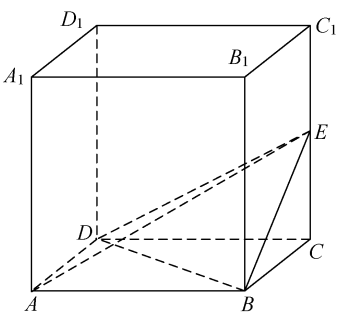


图 9-2-2

（3）【**解**】$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = 2$．

由图 9-2-2 可知，$V_{A\text{-}BDE} = V_{E\text{-}ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot CE =$

$\frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot CE = \frac{2}{3}$

【例 9-2-2】　如图 9-2-3 所示，已知四边形 AA_1B_1B 是圆柱 OO_1 的轴截面，底面直径 $A_1B_1 = 2$，母线 $AA_1 = 2$，D 是底面圆周上一点，且 $\angle DA_1B_1 = 60°$．

（1）求证：平面 $AA_1D \perp$ 平面 BB_1D；

（2）求直线 AD 与平面 AA_1B_1B 所成角的正切值；

（3）求三棱锥 $A - A_1DB_1$ 的体积．

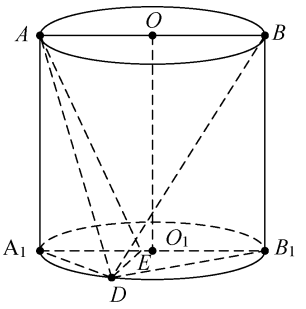


图 9-2-3

（1）【**证明**】∵ A_1B_1 是底面圆的直径

∴ $B_1D \perp A_1D$

∵ $AA_1 \perp$ 面 A_1DB_1

∴ $AA_1 \perp B_1D$，$AA_1 \cap A_1D = A_1$

∴ $B_1D \perp$ 平面 AA_1D

又 $BD_1 \subset$ 平面 BB_1D

$\therefore$ 平面 $AA_1D \perp$ 平面 BB_1D

（2）【解】在 Rt$\triangle A_1DB_1$ 中，过 D 作 $DE \perp A_1B_1$，垂足为 E，连接 AE

$\because AA_1 \perp$ 平面 A_1B_1D

$\therefore A_1A \perp DE$，$AA_1 \cap A_1B_1 = A_1$

$\therefore DE \perp$ 平面 AA_1B_1B

$\therefore AE$ 是 DA在平面AB_1上的射影

$\therefore \angle DAE$ 是直线 AD 与平面 AA_1B_1B 所成的角

又$\because \angle DA_1B_1 = 60°$，且 $A_1B_1 = 2$

$\therefore DE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$A_1E = \dfrac{1}{2}$，$AA_1 = 2$

$\therefore AE = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

$\therefore \tan\angle DAE = \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}} = \dfrac{\sqrt{51}}{17}$

即直线 AD 与平面 AA_1B_1B 所成角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{51}}{17}$.

（3）【解】$\because S_{\triangle A_1B_1D} = \dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore V_{A\text{-}A_1DB_1} = \dfrac{1}{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【例 9-2-3】 如图 9-2-4 所示，在四棱锥 $V-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，边长为 a，侧面 VAD 是正三角形，平面 $VAD \perp$ 平面 $ABCD$.

（1）证明：$AB \perp$ 平面 VAD；

（2）求面 VAD 与面 VBD 所成的二面角的平面角的正切值；

（3）求 $V-ABCD$ 的体积.

（1）【证明】$\because ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD \perp AB$

$\because$ 平面 $VAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$，平面 $VAD \perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore AB \perp$ 平面 VAD

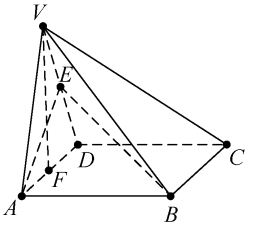


图 9-2-4

（2）【解】取 VD 的中点 E，连接 AE，BE

$\because \triangle VAD$ 是正三角形

$\therefore AE \perp VD$，$AE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$AD = a$

$\because AB \perp$ 平面 VAD

$\therefore VD \perp AB$，$AB \cap AE = A$

$\therefore VD \perp$ 面 ABE

$\therefore BE \perp VD$

所以，$\angle AEB$ 就是所求二面角的平面角.

$\because AB \perp$ 平面 VAD

$\therefore AB \perp AE$

$\therefore \tan\angle AEB = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$平面VAD与平面VBD所成的二面角的平面角的正切值为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

（3）【解】取AD中点F，连接VF

$\because \triangle VAD$是正三角形　$\therefore VF \perp AD$

平面$VAD \cap$平面$ABCD = AD$，平面$VAD \perp$平面$ABCD$

$\therefore VF \perp$平面　$ABCD$

$\therefore VF$就是四棱锥的高，$VF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\therefore V_{V\text{-}ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \bullet VF = \dfrac{1}{3}a^2 \bullet \dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

【例 9-2-4】　如图 9-2-5 所示，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为a的菱形，且$\angle DAB = 60°$，侧面PAD是等边三角形，且平面PAD垂直于底面$ABCD$.

（1）若G为AD的中点，求证：$BG \perp$平面PAD；

（2）求证：$AD \perp PB$；

（3）求二面角$A-BC-P$的大小.

（1）【证明】　$\because$底面$ABCD$是边长为a的菱形，且$\angle DAB = 60°$

且G为AD的中点，

$\therefore BG \perp AD$

又平面$PAD \perp$平面$ABCD$，

$\therefore BG \perp$平面PAD.

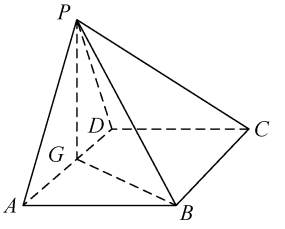


图 9-2-5

（2）【证明】连接PG

$\triangle PAD$是等边三角形且G为AD的中点，

$\therefore AD \perp PG$

且$AD \perp BG$，　$PG \cap BG = G$

$\therefore AD \perp$平面PBG，又$PB \subset$平面PBG，

$\therefore AD \perp PB$.

（3）【解】由$AD \perp PB$，　$AD \parallel BC$，

$\therefore BC \perp PB$

又$BG \perp AD$，　$AD \parallel BC$，

$\therefore BG \perp BC$

$\therefore \angle PBG$为二面角$A-BC-P$的平面角

在Rt$\triangle PBG$中，　$PG = BG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，　$\therefore \angle PBG = 45°$.

【实战演练】

一、达标检测

1．已知长方体的表面积为 32，体积为 8，且长方体的长、宽、高成等比数列，则长方体的所有棱长之和为 （　　）

A．40　　B．36　　C．32　　D．28

2．已知圆锥的母线长是 8，底面周长是 6π，则该圆锥的体积是 （　　）

A．$9\sqrt{55}\ \pi$　　B．$9\sqrt{55}$　　C．$3\sqrt{55}\ \pi$　　D．$3\sqrt{55}$

3．若长方体的所有棱长之和为 24，其对角线为 $\sqrt{14}$，则该长方体的全面积为 （　　）

A．22　　B．50　　C．14　　D．7

4．棱长为 a 的正方体内接于球，则球的表面积为 （　　）

A．πa^2　　B．$2\pi a^2$　　C．$3\pi a^2$　　D．$4\pi a^2$

5．设正四棱锥底面边长为 4 cm，侧面与底面所成的二面角是 60°，则这个棱锥的侧面积 $S=$_____cm^2.

6．$y=|x|$ 和 $y=3$ 围成的封闭平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积是_____.

7．圆柱形容器的内壁底半径为 5cm，两个直径为 5cm 的玻璃小球都浸没在这个容器的水中，若取出这两个小球，则容器内的水面将下降_____cm.

8．圆柱的侧面展开图是一个正方形，则它的侧面积是它的两底面积的_____倍.

9．如图 9-2-6 所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3\sqrt{3}$，$BC=3$，沿对角线 BD 将 $\triangle BCD$ 折起，使点 C 移到点 C'，且 C' 在平面 ABD 上的射影 O 恰好在 AB 上.

（1）求证：$AC'\perp BC'$

（2）求直线 AB 与平面 BDC' 所成角的正弦.

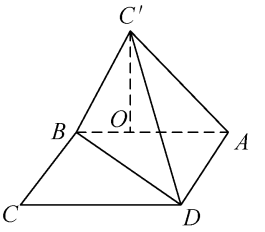


图 9-2-6

10．四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是 $AB=2$，$BC=\sqrt{2}$ 的矩形，侧面 PAB 是等边三角形，且侧面 PAB ⊥底面 $ABCD$.

（1）证明：侧面 PAB ⊥侧面 PBC；

（2）求侧棱 PC 与底面 $ABCD$ 所成的角；

（3）求直线 AB 与平面 PCD 的距离.

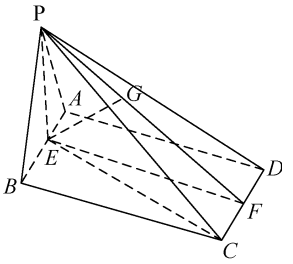


图 9-2-7

二、直击高考

1.（2012 年单招试题）若圆锥的表面积为 S，且它的侧面展开图是一个半圆，则这个圆锥的底面直径为（　　）

A. $\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$　　B. $2\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$　　C. $\sqrt{\dfrac{S}{5\pi}}$　　D. $2\sqrt{\dfrac{S}{5\pi}}$

2.（2012 年单招试题）如图 9-2-8 所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=AA_1=1$，$AB=2$.

（1）证明：当点 E 在棱 AB 上移动时，$D_1E\perp A_1D$；

（2）当 E 为 AB 的中点时，求①二面角 D_1-EC-D 的大小及正切值；②点 B 到平面 ECB_1 的距离.

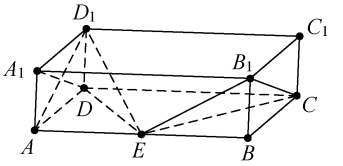


图 9-2-8

【提炼反思】

1．长方体长，宽，高分别为 a，b，c，则对角线 $l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，$S_{表}=2(ab+bc+ca)$ $V_{长}=sh=abc$，$V_{正}=a^3$.

2．几个常见的易混淆的几何体

正棱柱：底面是正多边形，侧棱与底面垂直，侧面是全等矩形.

正棱锥：底面是正多边形，且顶点在底面的射影是底面的中心，侧面是全等的等腰三角形.

正四面体：每个面皆为正三角形的四面体.

正三棱锥：底面是等边三角形，侧面是等腰三角形.

正四棱柱：底面是正方形的直棱柱，侧面是全等的长方形.（直棱柱：侧棱与底面垂直.）

正方体（正六面体）：每个面都是正方形.

3．直角三角形中射影定理.（如图 9-2-9 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$CD\perp AB$）

$AC^2=AD\times AB$，$BC^2=BD\times BA$，$AC\times BC=CD\times AB$.

4．圆锥侧面展开图的圆心角的大小 $\theta=\dfrac{r}{l}\times 360^\circ=\dfrac{2\pi r}{l}$.

5．（1）正三角形边长为 a，则高 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$；

（2）正六边形的边长 a，$S=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$（图 9-2-10）.

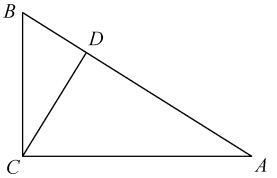


图 9-2-9

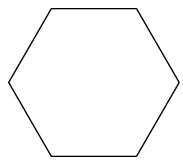


图 9-2-10

专题十　选考内容

【思维导航】

选学内容
- 逻辑代数初步
 - 二 进 制：二进制与十进制相互转换
 - 命　　题：真命题与假命题，复合命题
 - 逻辑变量：逻辑运算、真值表、运算律
- 算法与程序框图
 - 算法的概念
 - 算法的表示：程序框图
 - 基本逻辑结构：顺序结构、条件结构和循环结构
- 数据表格信息处理
 - 数据表格、数组：数据表格、数组的相关概念，制作数据表格从表格中正确读出数组，用数组解决实际问题
 - 数组的运算：数字数组的加、减、数乘及内积运算
 - 数据的图示：识记饼图、直方图、折线图的要素、结构特征，根据数据的图示对数据所反映的信息作简要分析
- 编制计划的原理与方法
 - 编制计划的有关概念：节点、紧前工序、工期
 - 关键路径法：会画流程图、能从流程图中找出关键路径
 - 网络图：会制作网络图
 - 横道图：读懂横道图，会绘制横道图

【考点梳理】

考　　点		要　　求
逻辑代数初步	二进制及其转换	了解
	命题逻辑与条件判断	理解
	逻辑变量与基本运算	理解
	逻辑式与真值表	了解
	逻辑运算律	了解
算法与程序框图	算法的概念	了解
	程序框图	理解
	算法与程序框图的实际应用	理解
数据表格信息处理	数据表格、数组	理解
	数组的运算	了解
	数据的图示	理解
编制计划的原理与方法	编制计划的有关概念	了解
	关键路径法	理解
	网络图	理解
	横道图	了解

第 1 讲　逻辑代数初步

【夯实基础】

1．二进制及其转换

（1）十进制：十进制数的进位规则是逢十进一．数码所在的位置叫做数位，也就是个位、十位、百位、千位、万位、亿位及十分位、百分位、千分位等．每个数位上可以使用的数码的个数叫做这种计数制的基数．每个数位所代表的数叫做位权数．十进制数的意义就是各个数位的数码与其位权数乘积之和．各个数位的位权数如表 10-1 所示：

表 10-1

位　置	整数部分				小数部分		
	…	第 3 位	第 2 位	第 1 位	第 1 位	第 2 位	…
位 权 数	…	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	…

（2）二进制：二进制的进位规则是“逢二进一”．二进制的基数是 2，每个数位上只有 0 和 1 两个数码，各个数位的位权数如表 10-2 所示：

表 10-2

位　置	整数部分			
	…	第 3 位	第 2 位	第 1 位
位 权 数	…	2^2	2^1	2^0

（3）十进制与二进制相互转换

① 二进制转化为十进制：乘权相加法，即每位数码与其相应的位权数相乘，然后相加求和，即为相应的十进制数．

② 十进制转化为二进制：除 2 取余法，即不断用 2 去除十进制，若余数为 1，则相应数位的数码为 1；若余数为 0，则相应数位的数码为 0，一直除到商是 1 为止，然后将先后所得余数和最后的商从高位向低位写出，得到相应的二进制数．

★二进制数 $(10011)_2$ 转化为十进制数是_____．将十进制数 5 转化为二进制数是_____．

2．命题逻辑与条件判断

（1）命题的概念

命题：能够判断真假的句子．正确的命题，称为真命题．错误的命题，称为假命题．

★给出下列命题：①0.01 不是有理数；②若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；③在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB>AC$，则 $\angle C>\angle B$；④若 $x^2-2x-3>0$，则 $x>3$ 或 $x<-1$．其中真命题的个数为　　（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

（2）逻辑联结词“非”、“且”、“或”及其真值表

复合命题：将一些简单命题用联接词联结，就构成复合命题．

① 非：设 p 是一个命题，则 p 的非（又称为否定）是一个新命题，记作 $\neg p$，读作“非 p”（或 p 的否定），其真值表为：

p	$\neg p$
真	假
假	真

由表可知：若 p 为真，则非 p 为假；若 p 为假，则非 p 为真.

② 且：设 p、q 是两个命题，则“p 且 q”是一个新命题，记作：$p \wedge q$，读作：“p 且 q”，其真值表为：

p	q	$p \wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

当且仅当 p，q 同时为真时，$p \wedge q$ 才为真（简述为同真则真，见假则假）.

③ 或：设 p、q 是两个命题，则“p 或 q”是一个新命题，记作：$p \vee q$ 读作：“p 或 q”，其真值表为：

p	q	$p \vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

当且仅当 p，q 同时为假时，$p \vee q$ 才为假（简述为：见真则真，全假则假）.

★已知命题 $p: 7=3+2$，$q: 2>3$，则命题 $p \wedge q$ 是_____（填“真”或“假”）命题.

★命题“$2 \leqslant 3$”是 （ ）

A. $p \vee q$ 形式的复合命题　　B. $p \wedge q$ 形式的复合命题

C. $\neg p$ 形式的复合命题　　D. 简单命题

3．逻辑变量与基本运算

① 逻辑变量：开关 A、B，灯 L 的状态会发生变化，且只有两种变化的状态，这样的量叫做逻辑变量，常用大写字母 A，B，…，L，…表示.

② 逻辑常量：逻辑变量只有两种状态，只能取值 0 和 1．这里的 0 和 1 只是一种符号，表示两种对立状态，它们之间没有大小关系．0 和 1 叫做逻辑常量.

③ 逻辑运算：或运算、与运算和非运算统称为逻辑运算.

④ 或运算：一个事件的发生依赖于两个条件，当这两个条件中至少有一个成立时，这个事件发生，称这种逻辑关系为“或”逻辑关系．或运算的真值表：

A	B	L
1	1	1 + 1 = 1
1	0	1 + 0 = 1
0	1	0 + 1 = 1
0	0	0 + 0 = 0

或运算的运算规则简述为：全零出零，有一出一.

⑤ 与运算：一个事件的发生依赖于两个条件，当且仅当这两个条件同时成立，这个事件才发生，称这种逻辑关系为“与”逻辑关系．与运算的真值表：

A	B	L
1	1	$1\cdot 1=1$
1	0	$1\cdot 0=0$
0	1	$0\cdot 1=0$
0	0	$0\cdot 0=0$

与运算的运算规则简述为：全一出一，有零出零．

⑥ 非运算：“非”就是“反”的意思，一个事件的发生依赖于一个条件，当这个条件成立时，这个事件不发生；反之，当这个条件不成立时，这个事件发生，称这种逻辑关系为“非”逻辑关系．非运算的真值表：

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

其中，“$\overline{0}=1$，$\overline{1}=0$”是非运算的运算规则．

★$0+\overline{1}\cdot\overline{1}+1+1\cdot 0+1=$_____．

4．逻辑式与真值表

① 逻辑式：由常量 1，0 以及逻辑变量经逻辑运算构成的式子称作逻辑代数式，简称逻辑式．

② 逻辑运算的规律：逻辑运算的次序依次为“非运算”“与运算”“或运算”，如果有添加括号的逻辑式，首先要进行括号内的运算．

③ 真值表：用表格的形式列出逻辑变量的一切可能值与相应的逻辑式的值的表．

★写出逻辑式 $Y=A\overline{B}+B$ 的真值表．

④ 等值逻辑式：如果对于逻辑变量的任何一组取值，两个逻辑式的值都相等，这两个逻辑式叫做等值逻辑式．等值逻辑式可用“=”连接，需要注意的是，这种相等是状态的相同．

5．逻辑运算律

运算律名称	运算律公式表示	
0–1 律	$0\cdot A=0$	$1+A=1$
自等律	$1\cdot A=A$	$0+A=A$
重叠律	$A\cdot A=A$	$A+A=A$
互补律	$A\cdot\overline{A}=0$	$A+\overline{A}=1$
交换律	$A\cdot B=B\cdot A$	$A+B=B+A$
结合律	$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$	$A+(B+C)=(A+B)+C$
分配律	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	$A+BC=(A+B)\cdot(A+C)$
吸收律	$A+A\cdot B=A$	$A\cdot(A+B)=A$
反演律	$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$
还原律	$\overline{\overline{A}}=A$	

利用这些运算律化简逻辑式时，一般需要以下几个步骤：（1）去括号；（2）使得项数最少；（3）使基本逻辑变量出现的次数最少.

★下列逻辑式中，正确的是 （ ）

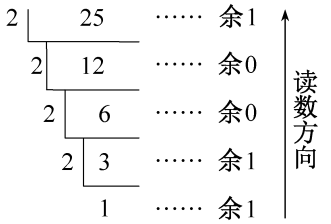
A. $A\cdot A=0$　　B. $A+A=1$

C. $A\cdot A=1$　　D. $0+A=A$

【方法导引】

【例 10-1-1】 将十进制数 25 转化为二进制数.

【解】



所以，$(25)_{10}=(11001)_2$.

【例 10-1-2】 化简：$\overline{\overline{A}BC}+\overline{A\overline{B}}$.

【解】方法一：$\overline{\overline{A}BC}+\overline{A\overline{B}}=\overline{\overline{A}}+\overline{BC}+\overline{A}+\overline{\overline{B}}$ （反演律）

$=A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{A}+B$ （还原律）

$=(A+\overline{A})+(B+\overline{B})+\overline{C}$ （交换律、结合律）

$=1+1+\overline{C}$ （互补律）

$=1$ （0-1 律）

方法二：$\overline{\overline{A}BC}+\overline{A\overline{B}}=\overline{\overline{A}BC}\,\overline{A\overline{B}}=\overline{(\overline{A}A)(B\overline{B})C}=\overline{0}=1$

【例 10-1-3】 求证：$A+\overline{A}B=A+B$.

【解】方法一：（真值表法）

A	B	$A+B$	$\overline{A}$	$\overline{A}B$	$A+\overline{A}B$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

所以，$A+\overline{A}B=A+B$.

方法二：逻辑运算律法

$A+\overline{A}B=(A+\overline{A})(A+B)$ （分配律）

$=1(A+B)$ （互补律）

$=A+B$ （自等律）

【例 10-1-4】　已知命题 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的实根；q：方程 $x^2+2(m-2)x+1=0$ 无实根，若 $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，求实数 m 的取值范围.

【解】因为 $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，所以 p 为真且 q 为假或 p 为假且 q 为真.

所以，$\begin{cases}m^2-4>0\\4(m-2)^2-4\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m^2-4\leqslant 0\\4(m-2)^2-4<0\end{cases}$

所以，m 的范围为 $(-\infty,-2)\cup(1,2]\cup[3,+\infty)$.

【例 10-1-5】　某歌唱比赛，有 A，B，C 三位评委，评委亮红灯记为 0，则不通过；评委亮绿灯记为 1，则通过；当三位评委中的两位同时亮绿灯时，则该选手可以晋级下一轮比赛，试写出该逻辑状态的真值表及满足的逻辑关系.

【解】（1）设该选手比赛结果用 L 表示，L 为 0 代表淘汰，L 为 1 代表晋级.

A	B	C	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

（2）$L=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC=AB+AC+BC$.

【实战演练】

一、达标检测

1．下列四个不同进制的数中，其值最大的是　（　　）

A．$(121)_{10}$　　B．$(1110111)_2$　　C．$(120)_{10}$　　D．$(1111110)_2$

2．若十进制数 a 与二进制数 a 相等，则 a 的值为　（　　）

A．0　　B．1　　C．0 或 1　　D．不存在

3．下面是真命题的是　（　　）

A．$2\in\{1,2,3\}$　　B．$2\notin\{1,2,3\}$　　C．$2\subseteq\{1,2,3\}$　　D．$2\not\subset\{1,2,3\}$

4．化简 $\overline{A}+\overline{B}+AB=$　（　　）

A．0　　B．1　　C．0 或 1　　D．不存在

5．观察图 10-1-1，其逻辑函数是　（　　）

A．$L=A(B+C)$

B．$L=A+B\overline{C}$

C．$L=A+B+C$

D．不存在

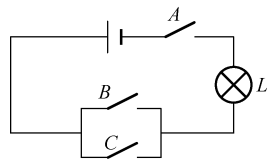


图 10-1-1

6．将十进制数 93 化为二进制数是_____.

7．写出下列各式的运算结果：

（1）$1+0+1+1=$_____；

（2）$0+\overline{1}\cdot\overline{1}+1+1\cdot 0+1=$_____.

8．如果 $\overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{A}+\overline{B}$，则逻辑变量 A，B 的值分别是_____.

9．如图 10-1-2 所示，用逻辑变量 A 、B 、C 表示 L，并列出真值表.

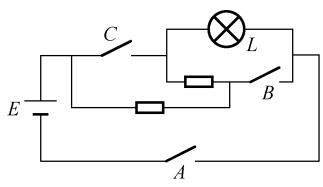


图 10-1-2

10．用逻辑运算律化简：

（1）$\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}+B$；　　（2）$\overline{AB}+\overline{ABCD}$.

11．已知命题 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的实数根；q：方程 $x^2+2(m-2)x+1=0$ 无实根，若 $p\wedge q$ 为真，求实数 m 的取值范围.

12．某电视台组织一档知识竞赛类节目，以便宣传、普及交通安全知识，并聘请相关专家评委三名，通过手中的表决器来表决晋级队伍．当三名评委半数以上同意时，该支队伍才可以晋级，但评委 A 有否决权，若 A 反对晋级，即使 B、C 同意，该支队伍也不能晋级．试设计一个表决电路，写出结果 F 与 A 、B、C 的函数关系，并列出真值表.

二、直击高考

1．（2014 年单招试题）将十进制数 51 换算成二进制数，即$(51)_{10}=$_____.

2．（2014 年江苏省职业学校单招一轮联考试题）化简：

$\overline{\overline{A}B\overline{C}}+B$　　$\overline{0}\cdot 1\cdot\overline{1+0}$

3．（2014 年无锡一模试题）观察如图 10-1-3 所示的电路：

（1）在下列哪种状态下，灯 L 不会亮　　（　　）

A．开关 A 、B 都合上，C 断开

B．开关 A 合上，B 、C 断开

C．开关 A 断开，B 合上，C 断开

D．开 A 关断开，B 、C 都合上

（2）请写出灯 L 与开关 A 、B 、C 之间的逻辑关系．

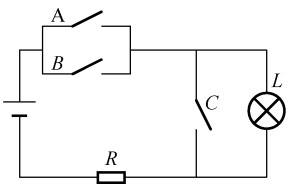


图 10-1-3

【提炼反思】

1．采用“除 2 取余法”，将十进制数转化为二进制数时，要注意余数的先后顺序，先得到的余数为二进制数的低位，后得到的余数为二进制数的高位．不同进制数的大小比较，首先要将进制转换一致，再进行比较．

2．命题逻辑的概念，常用的逻辑联结词，逻辑变量及其运算，是本节的重点．能判断真假的陈述句才是命题，感叹句、疑问句、祈使句等均不是命题，需要注意的是能否判断真假，并不是以人类的认知为限，只要其本身具有真假的即可．一个命题 p 的非命题，实际上就是写出原来命题的否定表达式，但要注意否定并不是对立，如“雪是白的”其非不能写成“雪是黑的”．

3．逻辑代数有三个基本的运算——与、或、非，它的运算规则不同于普通的运算规则，有些学生经常就会出现“$1+1=2$”的逻辑运算错误，其实逻辑运算的结果只表示状态而非大小．或、与、非的运算法则是先非，再与，最后或，有括号的先进行括号内运算．

4．根据电路，写出逻辑表达式的关键是充分观察分析电路图，找出灯亮与开关之间的逻辑关系．

5．证明逻辑式相等有两种方法：一是真值表法，二是运用逻辑运算律．

6．除了一些常见的运算律外，还需要掌握一些常用的化简方法，如：吸收法 $A+AB=A$，$A(A+B)=A$；消去法 $A+\overline{A}B=A+B$；配项法 $A=A(B+\overline{B})=AB+A\overline{B}$ 等．

第2讲　算法与程序框图

【夯实基础】

1．算法

算法是用来解决问题的一系列明确而有效的步骤，是解决问题的清晰指令．设计算法的要求是写出的算法必须能够解决某一类问题；要使算法尽量简单，步骤尽量少；要保证算法正确，且能够执行．

★看下面的四段话，其中不是解决问题的算法是　　（　　）

A．从济南到北京旅游，先坐火车，再坐飞机抵达

B．方程 $x^2-1=0$ 有两个实根

C．解一元一次方程的步骤是去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1

D．求 1+2+3+4+5 的值，先计算 1+2 = 3，再求 3+3 = 6，6+4 = 10，10+5 = 15，最终结果为 15

2．变量和赋值

（1）变量：在解决问题的过程中，可以取不同数值的量叫做变量．

（2）变量赋值的一般格式为：变量名 = 表达式．其中的符号“=”是赋值号，它的意义是将后面的表达式的值赋给变量，也就是将表达式的值存储到这个变量所对应的存储单元中．

注意：① 赋值符号“=”左边只能是变量名字，而不是表达式．如只能写成：$b=2$，$b=a+1$；不能写成：$2=b$，$b+1=2$．

② 在一个赋值语句中，只能给一个变量赋值，不能出现两个或两个以上的“=”号．如 $a=b=5$ 是错误的．

③ 赋值符号左边的变量如果原来没有值，在执行完赋值语句后，该变量获得一个值；如果原来已有值，则执行赋值语句后，用右边表达式的值替代原来的值．

（3）算法的基本特征：有穷性，可行性，确切性，有零个、一个或多个输入，有一个或多个输出．

★下列关于算法的说法：① 求解某一类问题的算法是唯一的；② 算法必须在有限步操作之后停止；③ 算法的每一步操作必须是明确的，不能有歧义或模糊；④ 算法执行后一定产生确定的结果．其中正确的有　　（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

（4）描述算法的一般步骤．

第一步　输入数据（若数据已知时，应用赋值；若数据为任意未知时，应用输入）；

第二步　数据处理；

第三步　输出结果．

3．程序框图

用规定的框、带箭头的线（也称为流程线或指向线）以及说明文字来准确、直观地表示算法的图形叫做算法的程序框图，也叫流程图．

4．常用的表示算法步骤的图形符号及其名称、意义

程 序 框	名　　称	意　　义
	起止框	表示一个算法的起始和结束，是任何流程图都不可少的
	输入输出框	表示一个算法输入和输出的信息，可用在算法中任何需要输入、输出的位置
	处理框	赋值、计算，算法中处理数据需要的算式、公式等分别写在不同的用以处理数据的处理框内
	判断框	判断某一条件是否成立．当条件成立时，程序沿“是”或“Y”方向执行；当条件不成立时，程序沿“否”或“N”方向执行
	流程线	表示流程进行的方向

在用程序框图表示算法时，必须遵循以下规则：（1）使用标准的图形符号；（2）程序框图一般按从上到下、从左到右的次序画；（3）在程序框图中，任意两个程序框之间都存在流程线；（4）一般，开始框只有一个出口，结束框只有一个进口，判断框有一个进口和两个出口，其他框有一个进口、一个出口；（5）在图形符号内使用的语言要简洁明了．

5．顺序结构

顺序结构由若干个依次执行的步骤组成．顺序结构的程序框图可以表示为：先执行步骤 A，再执行步骤 B，是一种按顺序执行的逻辑结构．如图 10-2-1 所示．

6．条件结构

算法的流程根据条件是否成立有不同的流向，当条件成立时，执行步骤 A，当条件不成立时，执行步骤 B．需要注意的是，在 A、B 两个步骤时，只能有一个被执行．如图 10-2-2 所示．

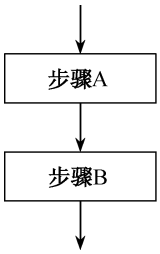


图 10-2-1　顺序结构

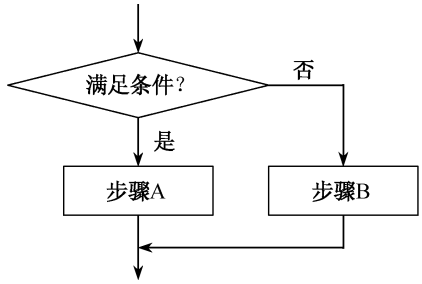


图 10-2-2　条件结构

7．循环结构

算法中，出现从某处开始，按照一定的条件反复执行某些步骤的情况，这就是循环结构．反复执行的步骤全体称为循环体．先执行循环体，然后再判断条件是否满足，如果不满足，则继续执行循环体，如此反复，直到条件满足，该循环过程才结束．如图 10-2-3 所示．

循环结构中有几个常用变量：

（1）计数变量——用来记录某个事件发生的次数．例如：$i=0$，$i=i+1$．

（2）累加变量——用来计算数据之和．例如：

$S=0$（表示初始值为 0，如果初始值为 a，则 $S=a$）；$S=S+i$（i 为累加项）.

（3）累乘变量——用来计算数据之积．例如：

$p=1$（表示初始值为 1，如果初始值为 a，则 $p=a$）；$p=p\times i$（i 为累乘项）.

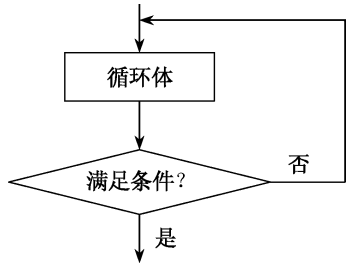


图 10-2-3　循环结构

算法及程序框图的三种基本逻辑结构中，顺序结构是最简单的结构，也是最基本的结构，循环结构必然包含条件结构．这三种基本逻辑结构的共同特点是：（1）都只有一个入口和一个出口；（2）基本逻辑结构内的每一部分都有机会被执行到，即对每一个框来说，都应当有一条从入口到出口的路径通过它；（3）基本逻辑结构内不允许存在死循环，所以循环结构中必定包含一个条件结构，用以判断循环结束的条件.

【方法导引】

【例 10-2-1】 阅读如图 10-2-4 所示的程序框图，若输出 s 的值为−7，则判断框内可填写（　　）

A．$i<3$　　B．$i<4$　　C．$i<5$　　D．$i<6$

【解】第一次执行循环体时 $s=1$，$i=1$，第二次执行循环体时 $s=-2$，$i=5$；第三次执行循环体时 $s=-7$，$i=7$，所以判断框内可填写“$i<6$”，选 D.

【例 10-2-2】 图 10-2-5 所示为一个算法的流程图，则输出 s 的值是_____.

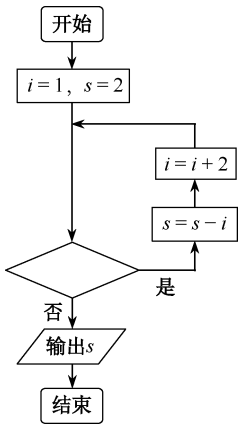


图 10-2-4

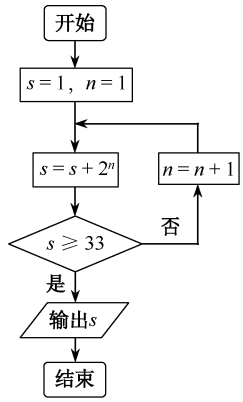


图 10-2-5

【解】程序执行如下：

n	s
1	1
2	$1+2=3$
3	$1+2+2^2=7$
4	$1+2+2^2+2^3=15$
5	$1+2+2^2+2^3+2^4=31$
6	$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5=63$

所以，由上表可知：$s=63$.

【例 10-2-3】　在超市里，每张唱片售价为 25 元，顾客若购买 5 张以上（含 5 张）唱片，则按九折收费，如果购买 10 张以上（含 10 张）唱片，则按八折收费，请设计算法步骤并画出程序框图，要求输入张数 x，输出实际收费 y（元）.

【解】算法如下：第一步，输入购买的张数 x；第二步，判断 x 是否小于 5，若是，计算 $y=25x$；否则，判断 x 是否小于 10，若是，计算 $y=22.5x$；否则，计算 $y=20x$；第三步，输出 y．程序框图如图 10-2-6 所示.

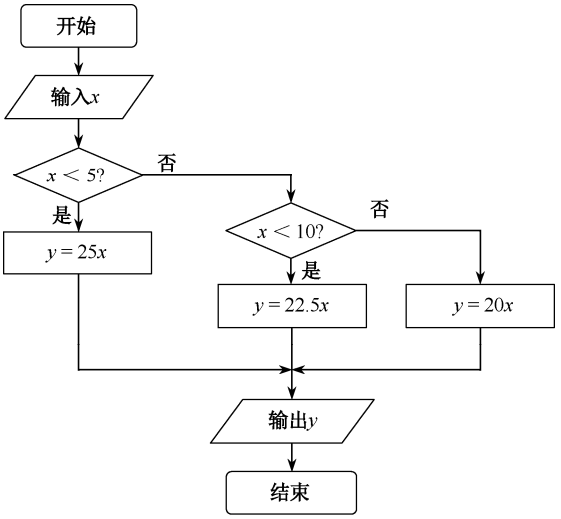


图 10-2-6

【例 10-2-4】　请设计一个求：$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{99}$ 的和的程序框图.

【解】程序框图如图 10-2-7 所示。

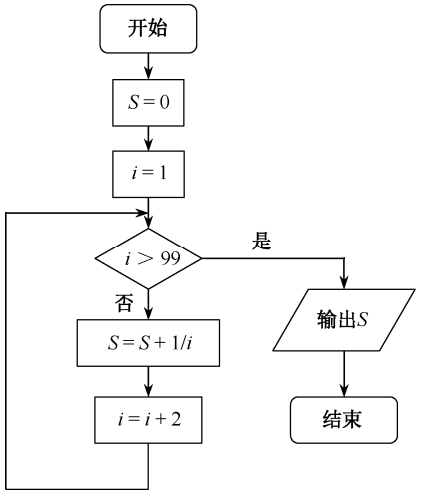


图 10-2-7

【实战演练】

一、达标检测

1．如图 10-2-8 所示的程序框图表示的算法功能是 （　　）

A．计算小于 100 的数的连乘积

B．计算不大于 100 的 5 的倍数的数的连乘积

C．计算 5 的倍数的连乘积

D．计算$1\times5\times\cdots\times n\geqslant100$成立时 n 的最小值

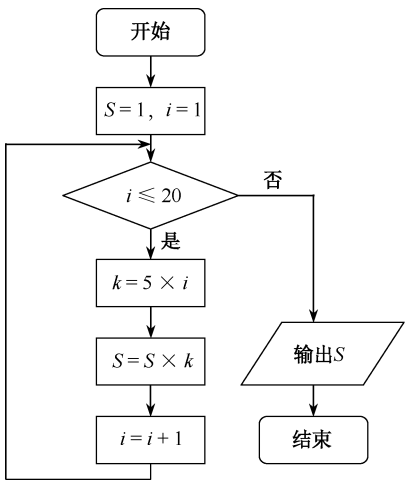


图 10-2-8

2．将两个数 $a=10$，$b=18$ 交换，使 $a=18$，$b=10$，下面语句正确的一组是 （　　）

A．
$a=b$
$b=a$

B．
$a=c$
$c=b$
$b=a$

C．
$b=a$
$a=b$

D．
$c=b$
$b=a$
$a=c$

3．如图 10-2-9 所示的程序框图，运行相应的程序，输出的结果是 （　　）

A．1　　B．2

C．3　　D．4

4．阅读如图 10-2-10 所示的程序框图，则输出的 i 的值是 （　　）

A．3　　B．4

C．5　　D．6

5．如图 10-2-11 所示，是为求 1 到 1000 的所有偶数的和而设计的一个程序框图，则①②处应分别为_____、_____.

6．根据如图 10-2-12 所示的算法流程图，写出输出结果 $S=$_____.

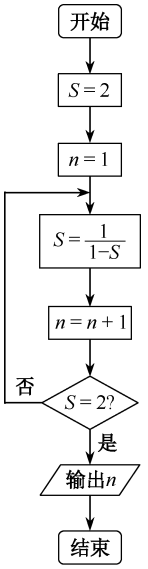


图 10-2-9

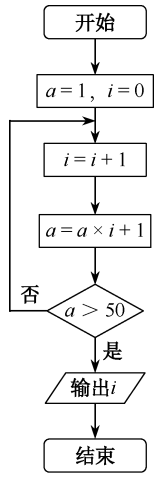


图 10-2-10

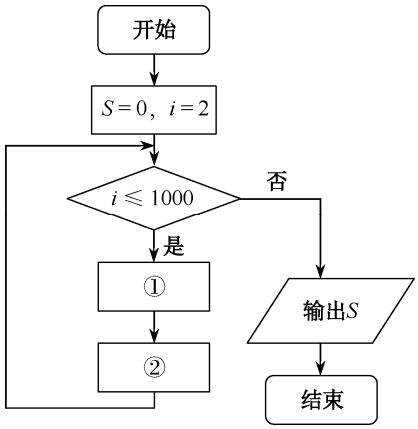


图 10-2-11

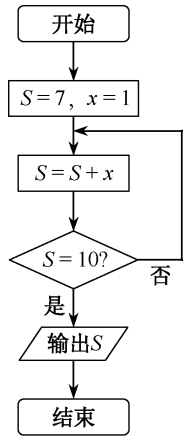


图 10-2-12

7．设函数 $y=\begin{cases}2^x & x\leqslant 1\\ x-2 & x>1\end{cases}$，试画出程序框图，要求任意输入一个实数 x，输出函数值 y．

8．已知 $S=1+2+3+\cdots+1000$，设计算法流程图，输出 S．

二、直击高考

1．（2014 年单招试题）图 10-2-13 所示是一个程序框图，运行输出的结果 $y=$_____．

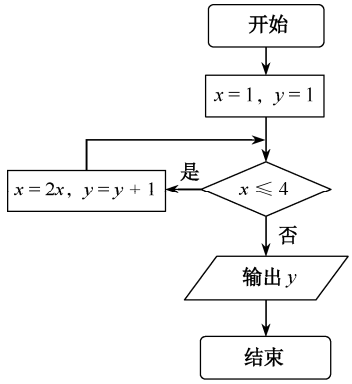


图 10-2-13

2．（2014 年江苏省职业学校单招一轮联考试题）如图 10-2-14 所示，（1）若判断框内为 $i<5$，则输出的结果是_____；（2）若输出的数是 45，则判断框内应填_____．

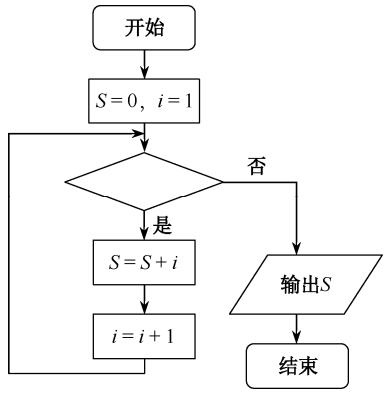


图 10-2-14

【提炼反思】

1．各种框图有其固定的格式和作用，不能乱用，流程线不要忘记画箭头．

2．凡必须先根据条件做出判断，然后再决定进行哪一个步骤的问题，在画程序框图时，必须引入判断框，采用条件结构设计算法．如果变量分三级(或以上)时,就需要用到条件结构的嵌套，不能忽视结果中“是”、“否”的书写，否则无法知道执行哪一条路径．一般地，分n段的分段函数，需要引入$n-1$个判断框．

3．循环结构主要用在一些有规律的重复计算的算法中，循环结构中的条件的表达要恰当、精确，以免出现多一次或少一次循环．在循环结构中，还要注意：

① 循环结构中，必定包含一个条件结构，用以判断循环结构执行或终止循环体的条件，以免出现死循环．

② 循环结构中，循环的次数要严格把握，注意区分“＜”与“≤”等符号．循环变量的取值与循环结构有关，需区分清楚．

③ 循环结构中，计数变量要赋初值，计数变量的自加不要忘记，自加多少不能弄错．另外计数变量一般只负责计数任务，在程序中若对其进行调用，需注意不要让其值发生改变（除自加以外的）．累加变量的初始值一般取 0，而累乘变量的初始值一般取 1．

④ 循环结构的程序框图，求解时，最好先写出程序运行的前几步，再总结出规律（从特殊到一般），最后找到答案．

第 3 讲　数据表格信息处理

【夯实基础】

1．数据表格

表格是由纵向的列和横向的行所围成的格子组成的，每个格子中都分别包含了文字、数字、字母等信息．我们把数据表格中的格子叫做单元格．表格通常由表号（表序）、表题、栏目行、栏目列、表头、表身组成．

（1）表号：表格的序号，用数字按全书（全文）或章统一编号，位于表格顶线的上方．表号用于区别不同的数据表格，若文中仅有一个表格，可省略表号．

（2）表题：表格的名称，简要反映表格的内容和用途，位于表格顶线的上方，紧随表号．

（3）栏目行与栏目列：栏目行即表格横排的第一行，栏目列即表格竖排的第一列．栏目行与栏目列可用中文、英文字母、数字等表示，反映该栏目列（栏目行）数据信息的属性、性质、单位等．

（4）表头：栏目行与栏目列的第一个单元格，一般情况下用于表示栏目行的属性，对于较复杂的表格，用斜线将表头分隔成若干个区域，分别表示栏目行与栏目列的属性．

（5）表身：收集的数据信息，每个单元格中的数据都应与所在的栏目行、栏目列相对应．

2．数组

表格中，每一个栏目下一组依次排列的数据叫数组，用黑体字母表示．数组中的每一个数据叫做数组的元素，用带下标的字母表示．数组中元素的个数叫做数组的维数．每一个数

组反映了对应栏目的相关信息，因此数组中各对应数据的次序不能更换．我们规定：两个数组相等，当且仅当这两个数组的元素个数相等，且按顺序对应的各元素也相等．数组可分为文字数组、数字数组、混合数组．

★下表是某班期中考试部分学生的成绩表

姓　名	语　文	数　学	英　语
甲	90	85	92
乙	95	89	91
丙	89	83	76
丁	80	75	83

上表中表示丙成绩的数组为　　（　　）

A.（90，85，92）　　B.（89，83，76）

C.（90，95，89，80）　　D.（语文，数学，英语）

3．数组的运算

对于两个 n 维数组 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_n)$．

（1）加法

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n)+(b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_n)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3,\ \cdots,\ a_n+b_n)$

（2）减法

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n)-(b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_n)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3,\ \cdots,\ a_n-b_n)$

（3）数乘

$k\boldsymbol{a}=k(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n)=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3,\ \cdots,\ ka_n)$

（4）内积

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n)\cdot(b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_n)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

注意：数组的内积是一个数．

（5）数组运算律

① $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{0}=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 是 n 维数字数组．

② 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$

$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$

③ 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

④ 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

注意： n 维数字数组是平面向量的推广，它与平面向量的运算律完全一致．因此，n 维数字数组也叫做 n 维向量．

★已知数组 $\boldsymbol{a}=(-1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ -1)$，则 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$_____．

★数组 $\boldsymbol{a}=(4,\ 3,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(5,\ -6,\ 7)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$_____．

★已知数组 $\boldsymbol{a}=(1,\ 2,\ -2,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ 0,\ -1,\ 3)$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$_____．

★已知向量 $\vec{a}=(x,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ y-1)$，且 $\vec{a}=\vec{b}$，则 $x+y=$_____．

4．饼图

饼图又称圆形图，它能够直观地反映个体与总体的比例关系，形象地显示个体在总体中所占的比例．绘制饼图的步骤如下．

第一步　绘制数据表，并在表上列出数据占总体的比例．

第二步　根据比例计算圆心角度数．

第三步　根据圆心角 α 画出扇形，并涂上不同的颜色．

第四步　在饼图的正上方写上标题，每个扇形旁边标注比例，并在图的右边标注不同颜色所对应的类别．

5．直方图

直方图又称柱形图，它能通过矩形的高低，形象地显示同类事物之间的数量、频数差异．直方图分为单一直方图和复式直方图．

绘制直方图的原理是以矩形面积表示数量、频数．为便于比较，在同一个直方图中每个矩形的宽保持不变，各矩形高的比等于其面积的比．因此，绘制直方图的关键是根据数据设置合理的高度，求出每个数据所对应的矩形的高．绘制直方图的步骤如下．

第一步　建立直角坐标系．一般用横轴表示数据类型，用纵轴表示数据类型的数值．

第二步　选取适当的纵坐标比例．

第三步　根据数据画出直方图．若直方图反映多个数组，应在表示同类数组的直方图上涂上相同颜色或画上相同的斜线．

6．折线图

折线图是用线段依次连接坐标系中的数据所表示的点而形成的折线．绘制折线图的步骤如下。

第一步　建立直角坐标系．一般用横轴表示时间、序号等变量，用纵轴表示数量、频数等．

第二步　选取适当的坐标比例．

第三步　在坐标系中标出数据所对应的点，并依次连接．若折线图同时反映多个数组，即图中有几条折线，要用不同的线型或颜色表示对应的类别．

第四步　在折线图的正上方写上标题，并在图的右边标注不同线型或颜色所对应的类别．

★下面哪一种是用来显示一段时间内数据变化或描述各项目之间数据比较的图表（　　）

A．饼图　　B．柱形图　　C．折线图　　D．面积图

7．数据拟合

数据拟合是通过数据来研究变量之间存在的相互关系，并给出近似的数学表达式的一种方法．根据拟合模型，可以对变量进行预测或控制．解决数据拟合问题的关键是准确绘制散点图．散点图又称点图，它是以圆点的大小和同样大小圆点的多少或疏密表示统计资料的数量及其变化趋势的图．

【方法导引】

【例 10-3-1】　已知数组 $\boldsymbol{a}=(2,-5,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,|x|,7)$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，求实数 x 的取值范围．

【解】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+(-5)\times|x|+4\times7<0$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-5|x|+30<0$

$|x|>6$

$\therefore x>6$ 或 $x<-6$

所以实数 x 的取值范围是 $(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$.

【例 10-3-2】 2013 年 5 月 1 日，某华润苏果超市销售的商品如下：

① 甲商品 200 件，销售价 5 元/件，成本价 3 元/件；

② 乙商品 250 件，销售价 3.9 元/件，成本价 2.5 元/件；

③ 丙商品 300 件，销售价 4 元/件，成本价 3 元/件.

（1）制作销售表格，并在表中反映商品名称、数量、销售价、成本价、利润；

（2）试用数组的方法，求华润苏果超市这一天中甲、乙、丙三种商品的销售总利润.

【解】（1）

某华润苏果超市商品销售统计表

商　品　名	甲	乙	丙
数量（件）	200	250	300
销售价（元/件）	5	3.9	4
成本价（元/件）	3	2.5	3
利润（元）	400	350	300

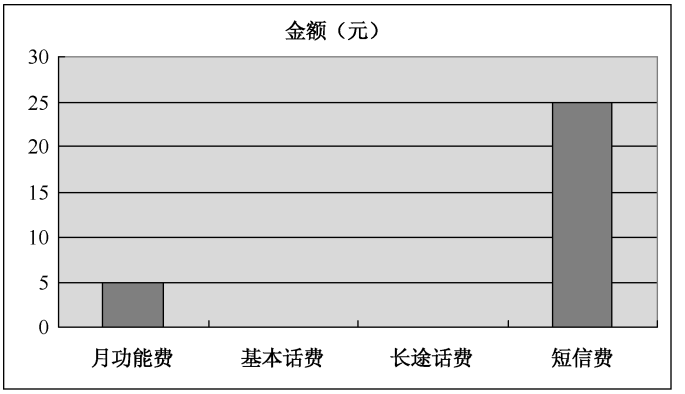
（2）销售量数组 $\boldsymbol{a}=(200，250，300)$，销售价数组 $\boldsymbol{b}=(5，3.9，4)$，成本价数组 $\boldsymbol{c}=(3，2.5，3)$

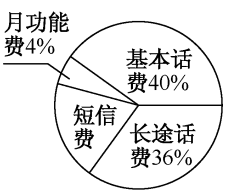
利润 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=(200，250，300)\cdot(2，1.4，10)=1050$，

所以，三种商品的销售总利润为 1050 元.

【例 10-3-3】 小王某月手机话费中的各项费用统计情况如下：

项　　目	月功能费	基本话费	长途话费	短　信　费
金额（元）	5			





请你根据图表信息完成下列各题：

（1）该月小王手机话费共有_____元.

（2）在饼图中，表示短信费的扇形的圆心角为_____度.

（3）请将表格补充完整.

（4）请将直方图补充完整.

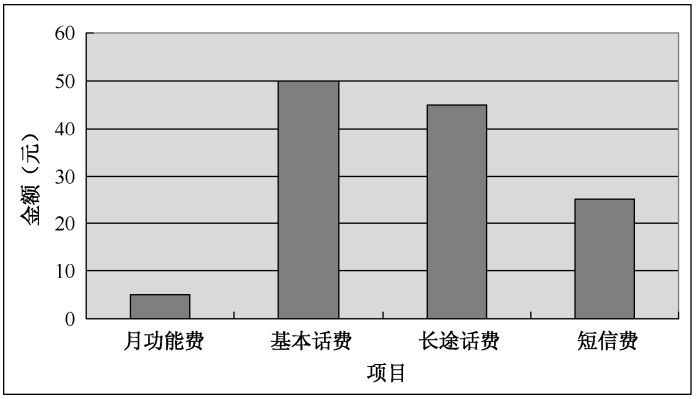
【解】（1）该月小王手机话费：$5\div4\%=125$元.

（2）在饼图中，表示短信费的扇形的圆心角：$360^\circ\times(1-4\%-40\%-36\%)=72^\circ$.

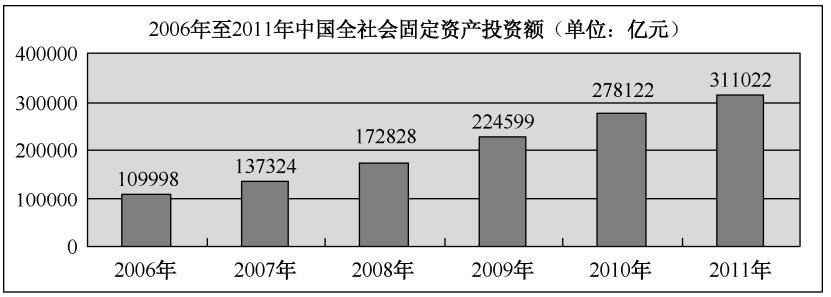
（3）小王某月手机话费中的各项费用统计情况：

项　目	月功能费	基本话费	长途话费	短信费
金额（元）	5	50	45	25

（4）小王某月手机话费中的各项费用统计直方图如下：



【例 10-3-4】　图 10-3-1 是 2006 年至 2011 年中国全年全社会固定资产投资额增长率的直方图和折线图.



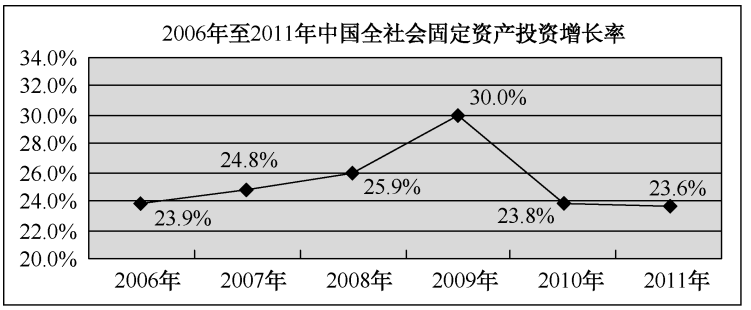


图 10-3-1

（1）请用数据表格反映图中的数据；

（2）根据图示，对中国固定资产投资情况作简要评析.

【解】（1）2006 年至 2011 年中国全年全社会固定资产投资额（单位：亿元）

年　份	2006	2007	2008	2009	2010	2011
投资额	109998	137324	172828	224599	278122	311022

2006 年至 2011 年中国全年全社会固定资产投资增长率

年　份	2006	2007	2008	2009	2010	2011
增长率	23.9%	24.8%	25.9%	30%	23.8%	23.6%

（2）由图可知，从 2006 年到 2011 年投资额逐年增加，到 2011 年达到最大值，从 2006 年到 2009 年投资增长率也在逐年提高，2010 年、2011 年投资增长率有所下降.

【例 10-3-5】 一个社会调查机构就某地居民的月收入（单位：元）调查了 10000 人，所得数据整理后分成六组：

月收入/元	1000～1500	1500～2000	2000～2500	2500～3000	3000～3500	3500～4000
频率/距组	0.0002	0.0004	0.0005	0.0005	0.0003	0.0001

根据上表数据，绘制出如图 10-3-2 所示的频率分布直方图：

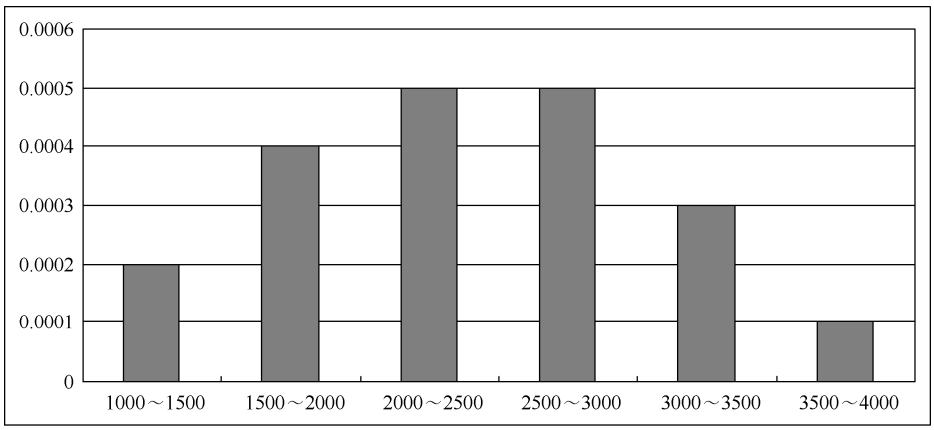


图 10-3-2

记频率分布直方图中从左到右的第一、第二，……，第六组的频数分别为 A_1，A_2，…，A_6（如：A_2 表示月收入在[1500，2000）内的频数）.

（1）求这 10000 人中，月收入（单位：元）在[1000，3000）内的人数；

（2）图 10-3-3 所示的程序框图是统计上面的频率分布直方图中月收入在[1000，3000）的人数的程序框图，写出程序框图中的判断框内应填的条件.

【解】（1）月收入（单位：元）在[1000，3000）内的频率为：

$(0.0002 + 0.0004 + 0.0005 + 0.0005) \times 500 = 0.8$

所以，月收入在内的人数为 $1000 \times 0.8 = 800$（人）.

（2）即需求 $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$，故判断框中应填 $i < 5$（或 $i \leqslant 4$）

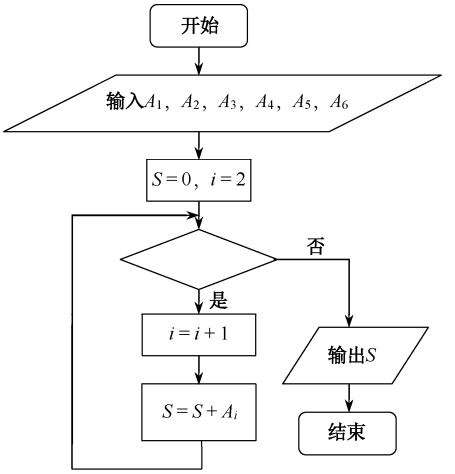
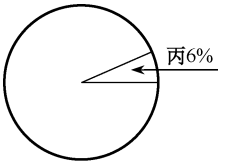


图 10-3-3

【实战演练】

一、达标检测

1．某班从甲、乙、丙三名候选人中选举一名学生代表，每张选票上只能选一人或不选，否则视为无效票. 得票超过半数者当选，无人超过半数时，得票前两位者再进行第二轮选举. 全班同学参加了投票，得票情况统计如下：



得票数量统计表

项　目	甲	乙	丙	其他
票　数	20		3	1

（1）该班的总人数为　　（　　）

A．40　　B．45　　C．50　　D．55

（2）通过计算可知当选的是　　（　　）

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．不能确定

2．如图 10-3-4 所示是小王五次射击成绩的折线图，根据图示信息，则这五次成绩的平均数是　　（　　）

A．7.6 环　　B．8 环　　C．8.4 环　　D．9 环

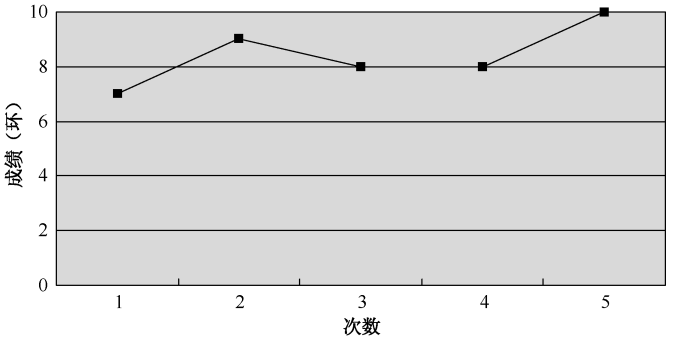


图 10-3-4

3．小张期末考试成绩如下：语文 76 分，数学 95 分，英语 80 分，基础会计 91 分，在制作饼图时，数学所对应的圆心角为_____.

4．图 10-3-5 反映了 2012 年伦敦奥运会我国获得的奖牌构成情况，现已知我国获得的奖牌总数为 88 枚，则金牌、银牌、铜牌的数目分别为_____，_____，_____.

5．学校对校园环境进行整理，我班 13 名同学参加这次卫生大扫除，按要求，需要完成总面积为 $80m^2$ 的三个项目的任务，三个项目的面积比例如图 10-3-6 所示.

从图中可知，擦课桌的面积为_____，扫地拖地所在扇形的圆心角为_____.

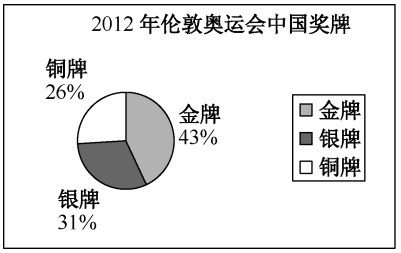


图 10-3-5

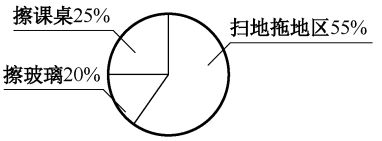


图 10-3-6

6．已知数组 $\boldsymbol{a}=(-1,\ 3,\ x)$，$\boldsymbol{b}=(y,\ 2,\ 3)$，$\boldsymbol{c}=(0,\ z,\ 5)$，且 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$．求实数 x，y，z 的值.

7．某饭店烹调“汽锅鸽子汤”的用料规定如下：①鸽子 1 只，单价 14 元/只；②水发口菇 50 克，单价 10 元/千克；③冬笋、火腿、干贝等原料 6 元；④调味品 0.9 元．规定毛利率为 55％．（1）制作“汽锅鸽子汤”的成本表；（2）求“汽锅鸽子汤”的定价（精确到 1 元）.

8．图 10-3-7 反映了我国 2008 年三个年龄段人口数占全国总人口数的比例.

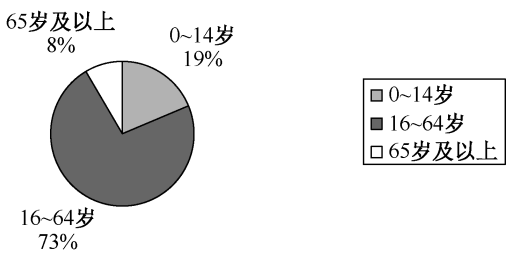


图 10-3-7

（1）若 2008 年我国总人口数为 132 802 万人，求三个年龄段的人口数；

（2）制作数据表，表中包括三个年龄段的人口数及比例.

9．下表是关于旅游的统计数据，根据表中的数据绘制直方图，并根据直方图作简要评析.

南京、北京、上海某月旅游人数统计表

旅游地点	南　京	北　京	上　海
中国大陆	368	490	514
亚洲（大陆以外）	288	269	344
欧洲	123	378	681
非洲	28	47	103

二、直击高考

1．（2014 年单招试题）某班三名学生小李、小王、小张参加了 2014 年对口单招数学模拟考试，三次成绩如表所示（单位：分）：

次序 / 学生	第一次	第二次	第三次
小李	84	82	90
小王	88	83	89
小张	86	85	87

按照第一次占 20%，第二次占 30%，第三次占 50%的不同比例分别计算三位同学的总评成绩，其中最高分数是_____.

2．（2014 年无锡一模试题）某饭店烹调“蘑菇菜心”的用料规定如下：青菜心 300 克，单价 4 元/公斤，蘑菇 100 克，单价 12 元/公斤，调味品 0.85 元，规定毛利率为 50%.

（注：毛利率 $=\dfrac{\text{销售收入}-\text{销售成本}}{\text{销售收入}}\times 100\%$ ）.

（1）制表并计算该菜肴的成本；

（2）求“蘑菇菜心”的定价.（精确到 1 元）.

3.（2014 年江苏省职业学校单招一轮联考试题）某商场购进 A 产品 150 件，每件进价 100 元，售价 120 元；购进 B 产品 120 件，每件进价 80 元，售价 110 元；购进 C 产品 150 件，每件进价 50 元，售价 80 元.

（1）制作“商品验收单”；

（2）求 A 产品的利润率.

【提炼反思】

1．作直方图时，应保持各个矩形的宽不变，高的比即为面积之比.

2．作折线图时，若图中有两条或以上折线，要用不同的线型或颜色加以区别.

3．饼图能形象直观地反映数据的比例.

第 4 讲　编制计划的原理与方法

【夯实基础】

1．编制计划的有关概念

工作：指有具体开始时间和完成时间的一项实际任务，也叫工序.

工期：某项工作从开始到完成的持续时间量叫做工期.

总工期：完成全部工作所需要的时间.

紧前工作与紧后工作：有些工作之间有先后关系，如果完成工作 A 后才能开始工作 B，则把 A 叫做 B 的紧前工作，B 叫做 A 的紧后工作.

平行工作：如果两项或多项工作可以同时进行，这些工作叫做平行工作.

工作流程图：把一项工程的各项工作用包含节点和箭线的图形来描述它们之间的关系，这种图形叫做工作流程图，也称网络图．网络图的要素：网络图中的第一个节点叫做网络图

的起始节点，表示一项工作的开始；网络图的最后一个节点叫做网络图的终止节点，表示一项工作的完成；两个节点之间的箭线表示一项工作.

虚设工作：为了保持工作间的逻辑关系，借助于虚线表示虚设工作，在网络图中，虚设工作只是为了表达工作间的逻辑关系，它是既不消耗时间也不消耗资源的工作.

★以下说法正确的是　　（　　）

A．工序也称工作.

B．工序之间主要有先后、平行两种关系.

C．如果工序 A 完成后才能进行工序 B，那么 A 叫做 B 的紧前工序.

D．平行工序的工期一定相等.

★做“青菜鸡蛋汤”有以下几道工序：①破蛋（1 分钟），②洗青菜（2 分钟），③水中放入青菜加热至沸腾（3 分钟），④沸腾后倒入鸡蛋加热（1 分钟），⑤搅蛋（1 分钟）.

（1）以下说法错误的是　　（　　）

A．①是④的紧前工作　　B．①是⑤的紧前工作

C．②是③的紧前工作　　D．③是④的紧前工作

（2）以下属于平行工作的是　　（　　）

A．①和④　　B．①和⑤　　C．②和③　　D．③和①

2．关键路径法的有关概念

路径：工作流程图中，从开始节点顺着箭线方向，经过一系列连续不断的作业直至最后一个节点的通路叫做路径.

路径的长度：所有路径中，路长最大的路径叫做关键路径．关键路径上的每一件工作都叫关键工作；关键路径上的每一个节点都叫做关键节点；关键路径的长度叫做工程的总工期.

3．关键路径法

（1）在工作明细表的基础上，列出工作间的邻接表；

（2）依据邻接表作出网络图；

（3）找到网络图中的关键路径，从而得到所编制计划的时间信息.

★某项工程的流程图如图 10-4-1 所示（单位：min）：

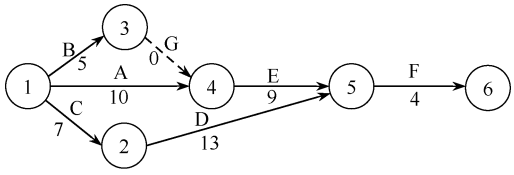


图 10-4-1

其中的关键路径是　　（　　）

A．$A \to E \to F$　　B．$C \to D \to F$

C．$B \to G \to E \to F$　　D．$B \to G \to D \to F$

4．网络图

每一项工作用一条箭线表示，箭线的起点和终点都是编有号码的节点，两个工作间按它们的内在逻辑关系邻接，在表示每一项工作的箭线上方标注工作名称，下方标注工期，这样的图叫做网络图.

（1）网络图的功能：一能完整而系统地反映工程由始至终的全过程；二能确切而有逻辑地表示工程各方面的内在关系.

（2）制作网络图的基本规则：

① 由开始节点出发，按照工作的流向从左到右绘制，直到终止节点，图中的开始节点和终止节点只能有一个；

② 一项工作有两个节点，两个节点间至多有一条箭线，节点的编号一定要按照箭线的方向由小到大；

③ 每一项工作的箭线上方标工作名称，下方标工期．虚设工作用虚箭线表示，虚设工作的工期为 0．

★指出图 10-4-2 所示流程图中不符合规则之处：_____．

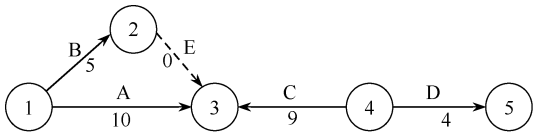


图 10-4-2

（3）编制网络图的基本步骤：

① 编排工作明细表，列出各项工作间的紧前关系；

② 依照工作明细表绘制网络图；

③ 节点统一编号．

★下列关于网络图的说法正确的是 （ ）．

A．网络图中可出现两个终止节点

B．网络图中允许存在逆向箭线与回路

C．箭线的上方和下方分别标有这项工作的工作编号和工期

D．虚设工作不一定用虚箭线表示

5．横道图

横道图就是以图示的方式通过活动列表和时间刻度形象地表示出任何特定项目的活动顺序与持续时间．横道图直观，易于理解和计算．绘制横道图的注意事项：

① 左边第一列为工作代码，第二列为工作名称，第三列为工期；

② 用横道表示一项工作及其工期，横道的长度表示工期；

③ 关键路径上关键工作用红色横道表示，非关键工作用斜纹横道表示；

④ 表格上方是工程标尺，下方为进度标尺，横道的长度对应于相应工作开始时间和结束时间．

★图 10-4-3 所示为某工程的横道图．

工作代码	工期/天	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3								
B	2								
C	3								
D	1								
E	2								
F	1								
进度标尺		8	7	6	5	4	3	2	1
星期		一	二	三	四	五	六	日	一
工程周		一							二

图 10-4-3

其中的平行工作是　　（　　）

A．B 与 C　　B．B 与 D　　C．A 与 B　　D．C 与 F

【方法导引】

【例 10-4-1】 小明要烧水沏茶，需要完成以下几件事情：A．洗茶壶（5 分钟）；B．烧水（10 分钟）；C．洗茶杯（5 分钟）；D．找茶叶（2 分钟）；E．泡茶（3 分钟）；F．喝茶（10 分钟）.

（1）上述各项工作中邻接的有哪些？

（2）平行工作有哪些？

（3）你认为小明完成这些工作最短需要多长时间？

【解】（1）A 的紧后工作是 B，E 的紧后工作是 F.

（2）C 和 D 是平行工作.

（3）关键路径是：A→B→E→F

所以，小明完成这些工作最短需要 28 分钟.

【例 10-4-2】 已知某项工程的网络图如图 10-4-4 所示：

（1）试确定它的关键路径，写出这项工作的总工期；

（2）画出它的横道图.

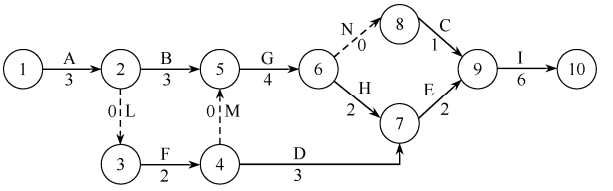


图 10-4-4

【解】（1）关键路径是 A→B→G→H→E→I， A、B、G、H、E、I 是关键工作，总工期为 20 天.

（2）横道图如下：

工作代码	工期（天）	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
A	3																				
B	3																				
C	1																				
D	3																				
E	2																				
F	2																				
G	4																				
H	2																				
I	6																				
进度标尺		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
星期		一	二	三	四	五	六	日	一	二	三	四	五	六	日	一	二	三	四	五	六
工程周		一							二							三					

【例 10-4-3】 为促进开发区建设，决定修建一条等级公路，工序间的关系如表 10-4-1 所示：

表 10-4-1

工作代码	工作名称	工期/月	紧前工作
A	前期考察	1	无
B	设计路径	2	A
C	旧屋拆迁	5	B
D	道路填平	2	B
E	挖隧道	4	B
F	修路	7	C、D、E

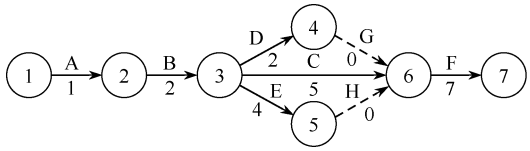
（1）绘制该项目的网络图；

（2）确定它的关键路径，指出最短总工期；

（3）试补全它的横道图（如表格中的行列不够，可自行补上）.

工作代码	工作名称	工期/月															
进度标尺																	
月			2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
工程年			一											二			

【解】（1）该项目的网络图如下：



（2）它的关键路径是：A→B→C→F，最短总工期为 15 月.

（3）它的横道图如下：

工作代码	工作名称	工期/月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	前期考察	1															
B	设计路径	2															
C	旧屋拆迁	5															
D	道路填平	2															
E	挖隧道	4															
F	修路	7															
进度标尺			15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
月			2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
工程年			一											二			

【实战演练】

一、达标检测

1．小毛放学回家自己煮面条吃，有下面几道工序：①洗锅盛水 2 分钟；②洗菜 6 分钟③准备面条和佐料 2 分钟；④用锅把水烧开 10 分钟；⑤煮面条和菜共 3 分钟．以上各道工序，除了④之外，一次只能进行一道工序．小毛要将面条煮好，最少要用多少分钟？（　　）

A．13　　B.14　　C.15　　D.23

2．下列命题中是假命题的是（　　）

A．网络图中的每个节点都是前道工序的结束，后道工序的开始

B．网络图中，一般将工序的名称写在箭线的下方

C．网络图中每条线路的工序不一定相等

D．总工期是指所有线路中工期最长的线路的工期

3．某项工程的流程图如图 10-4-5 所示（单位：min）：

（1）其中的关键路径是（　　）

A．$A\to E\to F$　　B．$C\to D\to F$

C．$B\to G\to E\to F$　　D．$B\to G\to D\to F$

（2）完成该工程的总工期是（　　）

A．23　　B．22　　C．24　　D．21

4．已知某计划网络图如图 10-4-6 所示（单位：天），若要求工期为 11 天，则下列说法错误的是（　　）

A．将 B 缩短为 4 天　　B．将 D 缩短为 3 天

C．将 A 和 C 同时缩短为 1 天　　D．将 A 和 E 同时缩短为 1 天

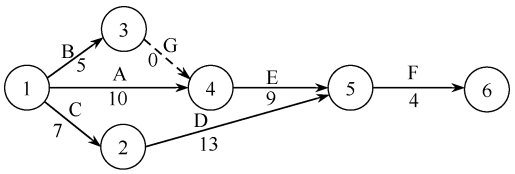


图 10-4-5

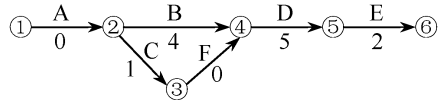


图 10-4-6

5．如图 10-4-7 所示为一工程的网络图，则下列说法正确的是（　　）

A．该工程的总工期为 9　　B．只有 A→D→E 为该工程的关键路径

C．A、D、E 为关键工作　　D．①③⑤⑥为关键节点

6．如图 10-4-8 所示，为一工程的网络图，则该工程的总工期为_____．

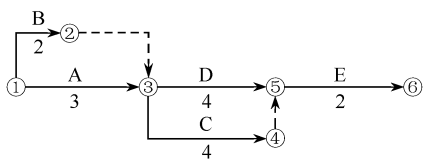


图 10-4-7

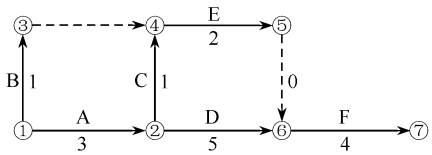


图 10-4-8

7．工厂进行一项技术改造，其作业活动，作业时间及相互关系如下表如示：

工 作 代 码	工期/天	紧 前 工 作
A	2	无
B	4	A
C	1	A
D	3	B，C
E	3	C
F	4	D，E
G	2	F

试根据该表绘制其网络图，并计算其总工期.

8．某工程的横道图如图 10-4-9 所示：

工序	工作名称	工时/天	1到7	8到14	15到21	22到28	29到35	36到42	43到47
A	前期设计	7							
B	旧屋拆件清理	5							
C	水电重新布线	7							
D	木工制作橱柜	20							
E	厨房、卫生间贴瓷砖	5							
F	刷墙面漆	10							
G	地板安装	2							
H	灯具安装、家具进新居	3							
进度标尺			47到41	40到34	33到27	26到20	19到13	12到6	5到1
星期			一到日	一到日	一到日	一到日	一到日	一到日	一到日
工程周			一	二	三	四	五	六	七

图 10-4-9

① 横道图显示，该工程的总工期为_____天.

② 该工程的关键路径为_____.

③ 开工后 16 天，监理前去工地检查，按照横道图显示，工程应处于哪几道工序？

二、直击高考

1．（2014 年单招试题）如图 10-4-10 所示为某项工程的网络图（单位：天），则该项工程总工期的天数为_____.

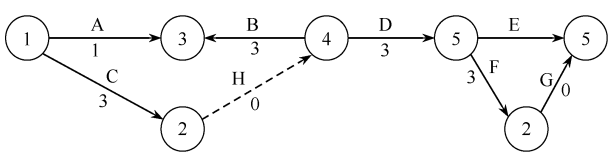


图 10-4-10

2.（2014 年无锡一模试题）某项工程的工作明细表如表所示：

工　序	A	B	C	D	E	F	G
工期（天）	5	6	2	4	5	2	1
紧前工序			A	B、C	B、C	D	E、F

试画出该工程的网络图，写出它的关键路径，计算工程的总工期.

3.（2014 年江苏省职业学校单招一轮联考试题）填写表中空缺栏，并绘制相应的网络图.

工 作 代 码	紧 前 工 作	紧 后 工 作	工期（天）
A	无		2
B	A		4
C			1
D	B，C		5
E	D		2

【提炼反思】

1．列出工作明细表，更利于作出工作流程图，找出关键路径.

2．画出工作流程图的关键是先找出各项工作之间的先后关系，才能合理安排协调各项工作．抓住各项工作存在的关系.

3．判断网络图的正确性，一要看节点顺序，二要看箭头指向，三要看工作名称和工期是否标对．绘制网络图，要恰当地使用虚设工序.

4．绘制横道图，先绘制相应的空白表，分析网络图，找出关键路径，再绘制关键工序相应的横道图，然后再绘制非关键工序的横道图.

“课课通”普通高校对口升学系列学习指导丛书

课课通
对口升学考试专题复习与强化训练·数学测试卷

主　编　陆　军　崔永红　邹翠香
副主编　狄昌进　李龙山　庞骁红　徐菊萍

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

目　　录

专题一　集合　测试卷 ……1
专题二　不等式　测试卷 ……3
专题三　数列　测试卷 ……5
专题四　函数　测试卷 ……7
专题五　三角函数　测试卷 ……9
专题六　概率统计　测试卷 ……11
专题七　平面向量及复数　测试卷……13
专题八　平面解析几何　测试卷 ……15
专题九　立体几何　测试卷 ……17
专题十　选考内容　测试卷 ……19
阶段测试卷（一） ……21
阶段测试卷（二） ……25
阶段测试卷（三） ……29
阶段测试卷（四） ……33
阶段测试卷（五） ……37
综合测试卷 ……43
专题测试卷参考答案 ……49
阶段测试卷参考答案 ……57
综合测试卷参考答案 ……68
专题参考答案 ……71

专题一　集合　测试卷

时间：45 分钟　　总分：100 分

一、选择题（本大题 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

1．下列集合中，等于空集的是　　（　　）

A．$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-4=0\}$　　B．$\{x\mid x>9\text{或}x<3\}$

C．$\{(x，y)\mid x^2+y^2=0\}$　　D．$\{x\mid x>9\text{且}x<3\}$

2．设集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$，则 $A\cap B=$　　（　　）

A．$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$　　B．$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$

C．$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$　　D．$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 4\}$

3．若集合 A，B，C 满足：$A\cap B=A$，$B\cup C=C$，则集合 A 与 C 之间的关系为（　　）

A．$A\subsetneqq C$　　B．$C\subsetneqq A$

C．$A\subseteq C$　　D．$C\subseteq A$

4．设 $A=\{x\mid 1<x<2\}$，$B=\{x\mid x<a\}$，若 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是　　（　　）

A．$\{a\mid a\geqslant 2\}$　　B．$\{a\mid a>2\}$

C．$\{a\mid a\geqslant 1\}$　　D．$\{a\mid a\leqslant 1\}$

5．已知集合 $M=\{(x，y)\mid x+y<0，xy>0\}$，$N=\{(x，y)\mid x<0，y<0\}$，那么　　（　　）

A．$M\subsetneqq N$　　B．$N\subsetneqq M$

C．$M=N$　　D．$M\not\subset N$

6．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则“$f(x)$ 为奇函数”是“$f(0)=0$”的　　（　　）

A．充要条件

B．必要而不充分条件

C．充分而不必要条件

D．既不充分也不必要条件

二、填空题（本大题 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

7．已知集合 $P=\{y\mid y=x^2+1，x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{y\mid y=x^2+2x，x\in\mathbf{R}\}$，则集合 $P\cap Q=$_____.

8．设集合 $A=\{x\mid -\frac{1}{2}<x<2\}$，$B=\{x\mid x^2\leqslant 1\}$，则 $A\cup B=$_____.

9．用描述法表示平面内不在第一和第三象限的点的集合为_____.

10．设全集 $U=\{1，3，5，7，9\}$，若集合 $A=\{1，|a-5|，9\}$且 $\complement_U A=\{5，7\}$，则 $a=$_____.

三、解答题（本大题 2 小题，共 40 分）

11. 设全集$U=\{-3,-\frac{1}{3},5\}$，集合$A=\{x\mid 3x^2+px-5=0\}$与集合$B=\{x\mid 3x^2+10x+q=0\}$，且$A\cap B=\{-\frac{1}{3}\}$. 求$\complement_U A$，$\complement_U B$.

12. 已知集合$A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{x\mid 0<x-m<9\}$.

（1）若$A\cup B=B$，求实数 m 的取值范围；

（2）若$A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

专题二　不等式　测试卷

时间：45 分钟　　总分：100 分

一、选择题（本大题 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

1．设 $0<b<a<1$，下列不等式中成立的是　　（　　）

A．$ab<b^2<1$　　B．$\log_{\frac{1}{2}}b<\log_{\frac{1}{2}}a<0$

C．$2^b<2^a<2$　　D．$a^2<ab<1$

2．下面四个条件中，使 $a>b$ 成立的充分不必要的条件是　　（　　）

A．$a>b+1$　　B．$a>b-1$　　C．$a^2>b^2$　　D．$a^3>b^3$

3．函数 $f(x)=\lg(x^2-1)$ 的定义域为　　（　　）

A．$(1,+\infty)$　　B．$(-\infty,-1]$

C．$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

4．不等式 $x^2+bx+\frac{1}{4}\leqslant 0$ 的解集为空集，则　　（　　）

A．$b<1$　　B．$b>-1$ 或 $b<1$　　C．$-1<b<1$　　D．$b>1$ 或 $b<-1$

5．设变量 x，y 满足 $|x|+|y|\leqslant 1$，则 $x+2y$ 的最大值和最小值分别为　　（　　）

A．1，-1　　B．2，-2　　C．1，-2　　D．2，-1

6．不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+3y\geqslant 4\\ 3x+y\leqslant 4\end{cases}$ 所表示的平面区域的面积等于　　（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

二、填空题（本大题 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

7．函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3-x}}{x+2}$ 的定义域是_____.

8．若关于 x 的不等式 $|x-a|<1$ 的解集为 $(b,3)$，则 $a+b=$_____.

9．复平面内，复数 $|a-1|+(a^2+2a-8)\mathrm{i}$ 表示的点位于第四象限，则实数 a 的取值范围为_____.

10．若实数 x，y 满足不等式组 $\begin{cases}2x-y-3>0\\ 2x+3y-6<0\\ 3x-5y-15<0\end{cases}$，则使 $z=x+y$ 取最大值的整数 $x=$_____.　$y=$_____.

三、解答题（本大题 2 小题，共 40 分）

11．求函数 $f(x)=\sqrt{2x^2+x-3}+\log_3(3+2x-x^2)$ 的定义域．

12．某人有楼房一幢，室内面积共 180cm^2，拟分隔成两类房间作为旅游客房，大房间每间面积为 18cm^2，可住游客 5 名，每名游客每天住宿费为 40 元，小房间每间面积为 15cm^2，可住游客 3 名，每名游客每天住宿费为 50 元，装修大房间每间需要 1000 元，装修小房间每间需要 600 元，如果他们只能筹 8000 元用于装修，且游客能住满客房，则应隔出大房间和小房间各多少间，才能获得最大利益？

专题三　数列　测试卷

时间：45 分钟　　总分：100 分

一、选择题（本大题 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

1．已知数列 $\{a_n\}$ 既是等差数列又是等比数列，则这个数列的前 n 项和为　　（　　）

A．0　　B．n　　C．na_1　　D．a_1^n

2．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_n=2\times3^{n-1}$，则由此数列的偶数项所组成的新数列的前 n 项和 S_n 的值为　　（　　）

A．3^n-1　　B．$3(3^n-1)$　　C．$\dfrac{9^n-1}{4}$　　D．$\dfrac{3(9^n-1)}{4}$

3．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_n\in\mathbf{R}$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 中　　（　　）

A．任意一项都不为零　　B．必有一项为零

C．至多有有限项为零　　D．可以有无数项为零

4．如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{3}{2}a_n-3$，那么这个数列的通项公式是　　（　　）

A．$a_n=2(n^2+n+1)$　　B．$a_n=3\cdot2^n$

C．$a_n=3n+1$　　D．$a_n=2\cdot3^n$

5．已知等差数列的第 k，n，p 项构成等比数列的连续 3 项，如果这个等差数列不是常数列，则等比数列的公比为　　（　　）

A．$\dfrac{n-p}{k-n}$　　B．$\dfrac{p-n}{p-k}$　　C．$\dfrac{n-k}{n-p}$　　D．$\dfrac{k-n}{k-p}$

6．若数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $a_nb_n=1$，$a_n=n^2+3n+2$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项之和为　　（　　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{5}{12}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{7}{12}$

二、填空题（本大题 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

7．若 2，x，y，z，18 成等比数列，则 $x=$_____.

8．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^3$，则 $a_6+a_7+a_8=$_____.

9．三个数成等比数列，它们的积为 512，如果中间一个数加上 2，则成等差数列，这三个数是_____.

10．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=1$，则 $a_2a_3+a_3a_4$ 取得最小值时对应的数列的通项公式为_____.

三、解答题（本大题 2 小题，共 40 分）

11．7 个实数排成一排，奇数项成等差数列，偶数项成等比数列，且奇数项的和与偶数项的积之差为 42，首末两项与中间项之和为 27，求中间项．

12．某家庭计划在 2013 年初购一套 50 万元的商品房．为此，计划于 2008 年初开始每年年初存入一笔购房专用款，使其能在 2013 年初连本带息不少于 50 万元人民币，如果年初的存款额相同，年利息按 4%的复利计算．求每年至少须存入银行多少万元人民币？（精确到 0.01，参考数据 $1.04^6 \approx 1.265$ ）

专题四　函数　测试卷

时间：45 分钟，总分：100 分

一、选择题（本大题 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

1．函数 $y=x^3$，$y=2^x$，$y=x^2+1$，$y=x^{-1}$ 中奇函数的个数为（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

2．已知 $\log_{\frac{1}{2}} m<\log_{\frac{1}{2}} n<0$，则（　　）

A．$n<m<1$　　B．$m<n<1$

C．$1<m<n$　　D．$1<n<m$

3．函数 $y=\dfrac{1}{1-x}+\lg(1+x)$ 的定义域为（　　）

A．$(-1,+\infty)$　　B．$(1,+\infty)$

C．$(-1,1)\cup(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,+\infty)$

4．设 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=2x(1-x)$，则 $f(-\dfrac{5}{2})=$（　　）

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．$-\dfrac{1}{4}$

C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

5．下列函数中，既是偶函数，又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　　）

A．$y=x^{-2}$　　B．$y=x^{-1}$

C．$y=x^2$　　D．$y=x^{\frac{1}{3}}$

6．已知 $a=\log_2 3.6$，$b=\log_4 3.2$，$c=\log_4 3.6$，则（　　）

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$

C．$b>a>c$　　D．$c>a>b$

二、填空题（本大题 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

7．函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$ 的定义域为_____.

8．若函数 $y=a^{x-1}+3$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图像恒过定点 A，则点 A 的坐标为_____.

9．函数 $f(x)=ax^2+bx+6$ 满足 $f(-1)=f(3)$，则 $f(2)=$_____.

10．函数 $y=x^2-mx+6$（$m>0$）在 $(-\infty,0]$ 上的最小值为_____.

三、解答题（本大题 2 小题，共 40 分）

11．已知 $f(x)=x^2+(a+1)x+b$，$f(3)=3$，$f(x)\geqslant x$ 时一切实数 x 均成立，求实数 a、b 的值.

12．已知 $f(x)=\log_{0.3}(x^2+2x-3)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）若 $f(x)\geqslant\log_{0.3}(x^2-4)$，求 x 的范围.

专题五　三角函数　测试卷

时间：45 分钟，总分：100 分

一、选择题（本大题 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

1．已知角 α 的终边经过点 $P(x,-6)$，且 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，则 $\cos\alpha=$　　（　　）

A．$\frac{3}{4}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$-\frac{4}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

2．点 $P(\tan\alpha,\cos\alpha)$ 在第三象限，则角 α 的终边在　　（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$，且 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值是　　（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{4}$　　D．$\pm\frac{1}{2}$

4．若 $z=(\sin\theta-\frac{3}{5})+(\cos\theta-\frac{4}{5})\mathrm{i}$ 是纯虚数，则 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=$　　（　　）

A．$-\frac{1}{7}$　　B．$-\frac{7}{3}$　　C．-1　　D．-7

5．在△ABC 中，若 $\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$，则△$ABC$ 的形状是　　（　　）

A．钝角三角形　　B．直角三角形　　C．锐角三角形　　D．不能确定

6．把函数 $y=\sin x$ 的图像上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把所得图像上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），得到的图像所表示的函数为　　（　　）

A．$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$　　B．$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

C．$y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6})$　　D．$y=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6})$

二、填空题（本大题 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

7．$\log_2\sin\frac{\pi}{12}+\log_2\cos\frac{\pi}{12}$ 的值为_____.

8．已知扇形的半径为 10cm，圆心角为 120°，则扇形的面积为_____.

9．已知 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{12})=\frac{1}{3}$，则 $\cos(\alpha+\frac{7\pi}{12})$ 的值为_____.

10．在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $a=3$，$C=120°$，△ABC 的面积 $S=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，则 $c=$_____.

三、解答题（本大题 2 小题，共 40 分）

11．在△ ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$．

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $b=3$，$\sin C=2\sin A$，求 a，c 的值．

12．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$），$x\in\mathbf{R}$ 的最大值是 1，最小正周期是 2π，其图像经过点 $M(0,1)$．

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）设 A，B，C 为△ ABC 的三个内角，且 $f(A)=\dfrac{3}{5}$，$f(B)=\dfrac{5}{13}$，求 $f(C)$ 的值．

专题六　概率统计　测试卷

考试时间：45 分钟　总分：100 分

一、选择题（本大题 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

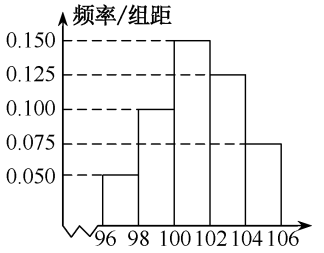
1．若某公司从五位大学毕业生甲、乙、丙、丁、戊中录用三人，这五人被录用的机会均等，则甲或乙被录用的概率为　（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{9}{10}$

2．采用简单随机抽样，从含有 10 个个体的总体中抽取一个容量为 4 的样本，这个总体中的个体 x 前 3 次没有被抽到，第 4 次被抽到的概率是　（　　）

A．$\frac{1}{10}$　　B．$\frac{1}{7}$　　C．$\frac{3}{7}$　　D．$\frac{1}{4}$

3．如题 3 图所示为某个容量为 100 的样本的频率分布直方图，分组为 [96，98)，[98，100)，[100，102)，[102，104)，[104，106)，则在区间 [98，100) 上的数据的频数为　（　　）



题 3 图

A．0.1　　B．0.2　　C．20　　D．10

4．某课题组进行城市空气质量调查，按地域把 24 个城市分成甲、乙、丙三组，对应城市数分别为 4、12、8．若用分层抽样抽取 6 个城市，则甲组中应抽取的城市数为　（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

5．投掷两颗骰子，其向上的点数分别为 m 和 n，则复数 $(m+n\mathrm{i})^2$ 为纯虚数的概率为　（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{6}$　　D．$\frac{1}{12}$

6．x 是 $[-4，4]$ 上的一个随机数，则使 x 满足 $x^2+x-2<0$ 的概率为　（　　）

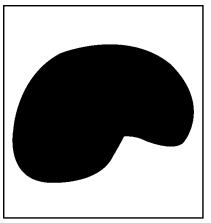
A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{5}{8}$　　D．0

二、填空题（本大题 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

7．二项式 $(2x^3-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中，第五项是_____.

8．若施化肥量 x (kg)与小麦产量 y (kg)之间的回归直线方程为 $\hat{y}=250+4x$，当施化肥量为 50kg 时，预计小麦产量为_____.

9. 如题 9 图所示，边长为 2 的正方形中有一封闭曲线围成的阴影区域，在正方形中随机撒一粒豆子，它落在阴影区域内的概率为 $\frac{2}{3}$，则阴影区域的面积为_____.



题 9 图

10．不透明的袋子中装有除颜色不同其他完全一样的黑、白小球共10个，从中任意摸出一个小球得到是黑球的概率为 $\frac{2}{5}$．则从中任意摸出 2 个小球，至少得到一个白球的概率为_____.

三、解答题（本大题 2 题，共 40 分）

11．一个口袋内装有大小相等的1个白球和编号为 1、2、3 的3个黑球，从中摸出 2 个球．

（1）共有多少种不同的结果（基本事件）？

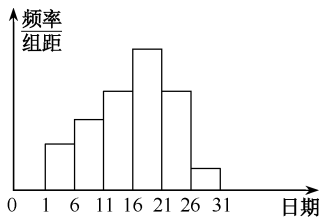
（2）摸出 2 个黑球有多少种不同结果？

（3）摸出 2 号或3号黑球的概率是多少？

12．在学校开展的综合实践活动中，某班进行了小制作评比，作品上交时间为 5 月 1 日至 30 日，评委会把同学们上交作品的件数按 5 天一组分组统计，绘制了频率分布直方图（如图所示）．已知从左到右各长方形的高的比为 2:3:4:6:4:1，第三组的频数为 12，请解答下列问题：

（1）本次活动共有多少件作品参加评比?（2）哪组上交的作品数最多？有多少件？

（3）经过评比，第四组和第六组分别有 10 件、2 件作品获奖，问这两组哪组获奖率较高？



题 12 图

专题七　平面向量及复数　测试卷

时间：45 分钟　　总分：100 分

一、选择题（本大题 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

1．设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ 等于　　（　　）

A．120°　　B．60°　　C．30°　　D．150°

2．已知向量 $\vec{a}=(2,\sin x)$，$\vec{b}=(\cos^2 x,2\cos x)$，则函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最小正周期是　　（　　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．π　　C．2π　　D．4π

3．在 $\triangle ABC$ 中，$(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=0$，则 $\triangle ABC$ 的形状一定是　　（　　）

A．等边三角形　　B．直角三角形　　C．等腰三角形　　D．无法确定

4．已知 $(x+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=y$，则实数 x，y 分别为　　（　　）

A．-1，1　　B．-1，2

C．1，1　　D．1，2

5．平面直角坐标系中，O 为坐标原点，已知两点 $A(3,1)$，$B(-1,3)$，若点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，且 $\alpha+\beta=1$，则点 C 的轨迹方程为　　（　　）

A．$3x+2y-11=0$　　B．$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

C．$2x-y=0$　　D．$x+2y-5=0$

6．若 $1-\mathrm{i}$ 是实系数方程 $3x^2-ax+b=0$ 的一个根，则 $a+b=$　　（　　）

A．-6　　B．-12　　C．12　　D．6

二、填空题（本大题 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

7．若 $z_1=a+2\mathrm{i}$，$z_2=3-4\mathrm{i}$，且 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数，则实数 $a=$_____.

8．若复数 $z=(a+\mathrm{i})^2$ 的辐角主值是 $\frac{\pi}{2}$，则实数 $a=$_____.

9．已知 $A(a,0)$，$B(3,2+a)$，直线 $y=\frac{1}{2}ax$ 与线段 AB 交于点 M，且 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$，则 $a=$_____.

10．在 $\triangle ABC$ 中，设向量 $\vec{m}=(\cos A,\sin A)$，$\vec{n}=(\sqrt{2}-\sin A,\cos A)$，若 $|\vec{m}+\vec{n}|=2$，则角 $A=$_____.

三、解答题（本大题 2 小题，共 40 分）

11．设 $z=-\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，求 $1+z+z^2+\cdots+z^{2014}$ 的值．

12．已知平面向量 $\vec{a}=(\sqrt{3},-1)$，$\vec{b}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$．

（1）证明：$\vec{a}\perp\vec{b}$；

（2）若存在不同时为零的实数 k 和 t，使 $\vec{x}=\vec{a}+(t-3)\vec{b}$，$\vec{y}=-k\vec{a}+t\vec{b}$，且 $\vec{x}\perp\vec{y}$，试求函数关系式 $k=f(t)$；

（3）根据（2）的结论，确定函数 $k=f(t)$ 的单调区间．

专题八　平面解析几何　测试卷

时间：45 分钟　　总分：100 分

一、选择题（本大题 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

1．若直线 $Ax+By+C=0$ 经过第一、二、三象限，则　　（　　）

A．$AB>0$ 且 $BC>0$　　B．$AB>0$ 且 $BC<0$

C．$AB<0$ 且 $BC>0$　　D．$AB<0$ 且 $BC<0$

2．直线 $x+y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2-2ay=0(a>0)$ 没有公共点，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,\sqrt{2}-1)$　　B．$(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$

C．$(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1)$　　D．$(0,\sqrt{2}+1)$

3．抛物线 $y=2x^2$ 的焦点坐标为　　（　　）

A．$(0,\frac{1}{4})$　　B．$(\frac{1}{4},0)$　　C．$(\frac{1}{8},0)$　　D．$(0,\frac{1}{8})$

4．双曲线 $\frac{x^2}{k}+\frac{y^2}{16}=1$（$k<0$）的焦点坐标为　　（　　）

A．$(0,\pm\sqrt{16+k})$　　B．$(0,\pm\sqrt{16-k})$　　C．$(\pm\sqrt{16-k},0)$　　D．$(\pm\sqrt{16+k},0)$

5．若 $k\in\mathbf{R}$，则方程 $\frac{x^2}{k+3}+\frac{y^2}{k+2}=1$ 表示焦点在 x 轴的双曲线的充要条件是　　（　　）

A．$-3<k<2$　　B．$k<-3$　　C．$k<-3$ 或 $k>-2$　　D．$k>-2$

6．已知椭圆上任一点到两焦点的距离分别为 d_1、d_2，$2c$ 为焦距，若 d_1，$2c$，d_2 成等差数列，则椭圆的离心率为　　（　　）

A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题（本大题 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

7．若椭圆长半轴长等于焦距，右准线方程为 $x=4$，则椭圆的标准方程为_____．

8．与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 有共同渐近线，且经过点 $(-3,2\sqrt{3})$ 的双曲线方程为_____．

9．若抛物线 $y^2=2x$ 上的两点 A、B 到焦点的距离之和等于 5，则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为_____．

10．若抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的准线与圆 $(x-2)^2+y^2=16$ 相切，则 p 的值为_____．

三、解答题（本大题 2 小题，共 40 分）

11. 过椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点 F_2 作一倾斜角为 $45°$ 的直线交该椭圆于 A、B 两点，F_1 是椭圆的左焦点，求：（1）弦 AB 的长；（2）$S_{\triangle ABF_1}$.

12．已知圆 C 经过点 $A(-2,0)$，$B(0,2)$，且圆心在直线 $y=x$ 上，直线 l：$y=kx+1$ 与圆 C 交于 P，Q 两点.

（1）求圆 C 的方程；

（2）若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-2$，求实数 k 的值.

专题九　立体几何　测试卷

时间：45 分钟　　总分：100 分

一、选择题（本大题 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

1．已知直线 $l\perp$ 平面 α，直线 $m\subset$ 平面 β，有下列四个命题：

① $\alpha /\!/ \beta \Rightarrow l\perp m$　　② $\alpha\perp\beta\Rightarrow l /\!/ m$

③ $l /\!/ m\Rightarrow\alpha\perp\beta$　　④ $l\perp m\Rightarrow\alpha /\!/ \beta$

其中正确的命题有（　　）

A．①与②　　B．③与④　　C．②与④　　D．①与③

2．设 α，β 是两个平面，l 和 m 是两条直线，那么 $\alpha /\!/ \beta$ 的一个充分条件是（　　）

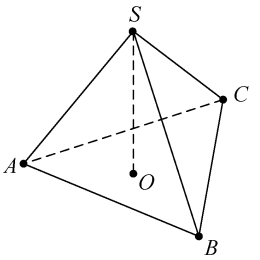
A．$l\subset\alpha$，$m\subset\alpha$ 且 $l /\!/ \beta$，$m /\!/ \beta$　　B．$l\subset\alpha$，$m\subset\beta$ 且 $l /\!/ m$

C．$l\perp\alpha$，$m\perp\beta$ 且 $l /\!/ m$　　D．$l /\!/ \alpha$，$m /\!/ \beta$ 且 $l /\!/ m$

3．如题 3 图所示，SA，SB，SC 是两两垂直的三条线段，$SO\perp$ 平面 ABC，O 为垂足，则 O 为 $\triangle ABC$ 的（　　）

A．重心　　B．垂心

C．内心　　D．外心



题 3 图

4．将等腰直角三角形 ABC 沿它的斜边 BC 上的高 AD 折成直二面角，使 B 到 B' 的位置，则三角形 $AB'C$ 是（　　）

A．等边三角形　　B．直角三角形

C．非等边的锐角三角形　　D．钝角三角形

5．正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 底面边长为 $2a$，侧棱长 a，则截面 A_1BC 与底面 ABC 所成二面角的大小为（　　）

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．75°

6．正方形 $ABCD$ 所在平面外一点 P，有 $PA=PB=PC=PD=AB$，则二面角 $P-AB-C$ 的余弦值是（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题（本大题 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

7．在正四面体 $S-ABC$，E、F 分别为 SC、AB 的中点，则异面直线 EF 与 SA 所成角的大小是_____.

8．已知圆锥的高 PO 为 $\sqrt{2}$，过顶点 P 的一个截面 PAB 与底面所成的二面角为 45°，且截面 PAB 的面积为 4，则此圆锥的侧面积为_____.

9．棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AC_1 与 BB_1 所成角的正弦值是_____.

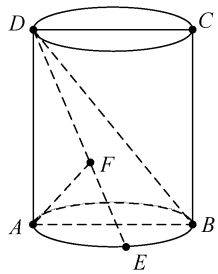
10．正三棱锥的底面边长为 2，侧面均为直角三角形，则此三棱锥的体积为_____.

三、解答题（本大题 2 小题，共 40 分）

11．如题 11 图所示，$ABCD$ 是圆柱的轴截面，点 E 是底面圆周上的一点，$AF \perp DE$，F 是垂足.

（1）求证：$AF \perp DB$；

（2）如果 $AB = 2a$，圆柱与三棱锥 $D - ABE$ 的体积比等于 3π，求点 E 到截面 $ABCD$ 的距离.

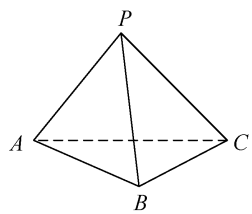


题 11 图

12．如题 12 图所示，在三棱锥 $P - ABC$ 中，$AB = 12$，$PA = AC = 8$，$\angle PAB = \angle PAC = \angle BAC = 60°$.

（1）求证：$PC \perp AB$；

（2）求三棱锥 $P - ABC$ 的体积.



题 12 图

专题十　选考内容　测试卷

时间：45分钟　　总分：100分

一、选择题（本大题 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

1．二进制数 $(10001)_2$ 转换为十进制数是　　（　　）

A．16　　B．17　　C．32　　D．33

2．设 A、B 是两个逻辑变量，则“$B=1$”是“$A+B=1$”的　　（　　）

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

3．观察题 3 图，其逻辑函数是　　（　　）

A．$L=A(B+C)$　　B．$L=A+B\overline{C}$

C．$L=A+B+C$　　D．不存在

4．阅读如题 4 图所示的程序框图，则输出的 i 的值是

（　　）

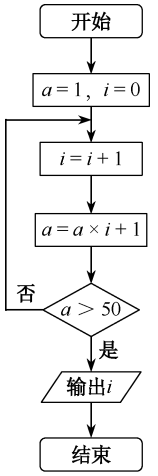
A．3　　B．4

C．5　　D．6

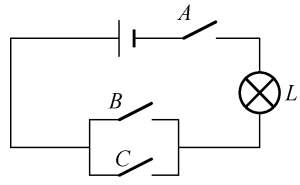
5．已知数组 $\boldsymbol{a}=(1,2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1,2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$　　（　　）

A．（2，2，2）　　B．2　　C．（−1，3，3）　　D．4

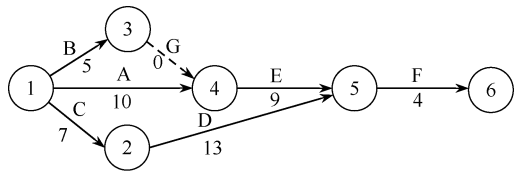
6．某项工程的流程图如图所示（单位：min）：



题 4 图



题 3 图



题 6 图

（1）其中的关键路径是　　（　　）

A．$A\rightarrow E\rightarrow F$　　B．$C\rightarrow D\rightarrow F$

C．$B\to G\to E\to F$　　D．$B\to G\to D\to F$

（2）完成该工程的总工期是（　　）

A．23　　B．22　　C．24　　D．21

二、填空题（本大题 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

7．十进制数$(46)_{10}$转换为二进制数为_____.

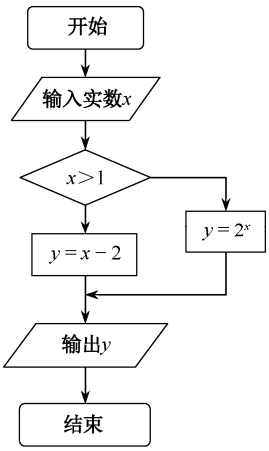
8．如果$\overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{A}+\overline{B}$，则逻辑变量 A，B 的值分别是_____.

9．根据题 9 图所示的程序框图，当输入 x 的值为 3 时，输出的结果为_____，当输入 x 的值为 7 时，输出的结果为_____.

10．高飞装饰有限公司 7 月份部分员工工资表如下（单位：元）：

姓名	部门	性别	基本工资	奖金	加班工资	房租
常镇	办公室	男	1885.0	860.0	185.0	37.4
包维胜	人事处	男	1610.0	750.0	0	41.1
许可梅	总务处	女	1465.0	520.0	260.0	34.6

上表中平均奖金为_____元，包维胜的实发工资为_____元，加班工资总和为_____元，实发工资总和为_____元.



题 9 图

二、解答题（本大题 2 小题，共 40 分）

11．求证：$A+\overline{A}B=A+B$.

12．某饭店烹调“蘑菇菜心”的用料规定如下：青菜心 300 克，单价 4 元/公斤，蘑菇 100 克，单价 12 元/公斤，调味品 0.85 元，规定毛利率为 50%.

（注：毛利率$=\dfrac{\text{销售收入}-\text{销售成本}}{\text{销售收入}}\times 100\%$）.

（1）制表并计算该菜肴的成本；

（2）求“蘑菇菜心”的定价（精确到 1 元）.

阶段测试卷（一）

考试时间：120 分钟　总分：150 分

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在下列每小题中，选出一个正确答案）

1．若集合 $M=\{1,2,3\}$，$N=\{y\mid y=2x-1,x\in M\}$，$P=\{z\mid z^2-2z+4=0\}$，$Q=N\cup P$，则 M 与 Q 的关系为（　　）

A．$M=Q$　　B．$M\subset Q$　　C．$M\supset Q$　　D．以上都不对

2．设集合 $X=\{1,2,4,5\}$，$Y=\{1,3,4,6\}$，$Z=\{3,5,7\}$，则 $(X\cup Y)\cap Z$ 等于（　　）

A．$\{3,5\}$　　B．$\{1,3,4,6\}$　　C．$\{3,5,7\}$　　D．$\{1,2,4,5,7\}$

3．设 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid -4<x<1\}$，$B=\{x\mid x\leqslant -4\}$，$C=\{x\mid x\geqslant 1\}$，则（　　）

A．$A\cap B=C$　　B．$A\cup B=C$　　C．$\complement_U(A\cap B)=C$　　D．$\complement_U(A\cup B)=C$

4．如果 $a>b>0$，$c>d>0$，则下列不等式中不正确的是（　　）

A．$a-d>b-c$　　B．$\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$　　C．$a+d>b+c$　　D．$ac>bd$

5．如果 a、b 为非 0 实数，则不等式 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ 成立的充要条件是（　　）

A．$a>b$ 且 $ab<0$　　B．$a<b$ 且 $ab>0$

C．$a>b$，$ab<0$ 或 $ab<0$　　D．$a^2b-ab^2<0$

6．已知 a、b 为实数，则“$a+b>2$”是“a、b 中至少有一个大于 1”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．不等式 $6x^2+5x<4$ 的解集为（　　）

A．$(-\infty,-\dfrac{4}{3})\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$　　B．$(-\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{2})$

C．$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4})$　　D．$(-\infty,-\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{4}{3},+\infty)$

8．若 $a>0$，且不等式 $ax^2+bx+c<0$ 无解，则左边的二次三项式的判别式（　　）

A．$\Delta<0$　　B．$\Delta=0$　　C．$\Delta\leqslant 0$　　D．$\Delta>0$

9．设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 S_{10} 等于（　　）

A．$10a_1$　　B．$10a_1+45d$　　C．$10a_1+90d$　　D．$10(a_1+a_{10})$

10．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_9=-2$，则此数列前 17 项的积等于（　　）

A．2^{16}　　B．-2^{16}　　C．2^{17}　　D．-2^{17}

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．已知集合 $A=\{a,b,2\}$，$B=\{2,b^2,2a\}$，若 $A=B$，则 $a=$_____．

12．已知 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，则 b^2-4ac 的值的符号为_____.

13．已知 D 是由不等式组 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y\geqslant 0\end{cases}$ 所确定的平面区域，则圆 $x^2+y^2=4$ 在区域 D 内的弧长为_____.

14．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1+a_4+a_7=39$，$a_2+a_5+a_8=33$，则 $a_3+a_6+a_9=$_____.

15．已知四个数中，前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，二、三两数之和为 8，一、四两数之和为 16，这四个数为_____.

三、解答题（本大题 8 小题，共 90 分）

16．（6 分）若集合 $A=\{x\,|\,x^2-5x+6=0\}$，$B=\{x\,|\,ax-6=0\}$，且 $A\cup B=A$，求由实数 a 组成的集合.

17．（12 分）设满足 $3-x\geqslant\sqrt{x-1}$ 的 x 的集合为 A；满足 $x^2-(a+1)x+a\leqslant 0$ 的 x 的集合为 B.

（1）若 $A\subset B$，求 a 的取值范围；

（2）若 $A\supseteq B$，求 a 的取值范围；

（3）若 $A\cap B$ 为仅含一个元素的集合，求 a 的值.

18．（12 分）解下列不等式：

（1）$|3x-4|\leqslant 19$；　　（2）$|\dfrac{x-1}{2}+4|>3$ ；

（3）$30+7x-2x^2<0$；　　（4）$3x^2-5x+4>0$.

19.（12 分）设函数 $f(x)$ 的图像为一条开口向上的抛物线，已知 x、y 均为正数，$p>0$，$q>0$ 且 $p+q=1$，求证：$f(px+qy)<pf(x)+qf(y)$.

20.（12 分）某纺纱厂生产甲、乙两种棉纱，已知生产甲种棉纱 1 吨需耗一级子棉 2 吨、二级子棉 1 吨；生产乙种棉纱需耗一级子棉 1 吨、二级子棉 2 吨，每 1 吨甲种棉纱的利润是 600 元，每 1 吨乙种棉纱的利润是 900 元，工厂在生产这两种棉纱的计划中要求消耗一级子棉不超过 300 吨、二级子棉不超过 250 吨．甲、乙两种棉纱应各生产多少（精确到吨），能使利润总额最大?

21.（12 分）设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $b_n=\dfrac{1}{S_n}$，且 $a_3b_3=\dfrac{1}{2}$，$S_3+S_5=21$，（1）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；（2）求证：$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<2$.

22.（12 分）已知a_1，a_2，a_3，…a_n，…构成一等差数列，其前n项和$S_n=n^2$，设$b_n=\frac{a_n}{3^n}$，记数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n.（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（2）证明：$T_n<1$.

23.（12 分）大楼共n层，现每层指定一人，共n人集中到设在第k层的临时会议室开会，问k如何确定能使n位参加人员上、下楼梯所走的路程总和最短.（假定相邻两层楼梯长相等）.

阶段测试卷（二）

考试时间：120 分钟　总分：150 分

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在下列每小题中，选出一个正确答案）

1．已知集合 $A=\{y\mid y=x+2\}$，$B=\{y\mid y=x^2\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A．$x=2$，$y=-1$　B．$\{2,-1\}$　C．$\{(2,-1)\}$　D．$\{y\mid y\geqslant 0\}$

2．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_3+a_{11}=50$，则 $a_6+a_7+a_8=$ （　　）

A．80　B．75　C．70　D．85

3．函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是 （　　）

A．$[1,+\infty)$　B．$(\frac{2}{3},+\infty)$　C．$[\frac{2}{3},1]$　D．$(\frac{2}{3},1]$

4．已知 $\cos\theta\tan\theta<0$，则 θ 是 （　　）

A．第一或第二象限的角　B．第二或第三象限的角

C．第三或第四象限的角　D．第一或第四象限的角

5．已知 $x-1$，$x+1$，$2x+3$ 成等差数列，则 $x=$ （　　）

A．-2　B．0　C．2　D．4

6．$\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}=$ （　　）

A．0　B．$-\sqrt{2}$　C．$\sqrt{2}$　D．2

7．已知 $a<b<0$，则下列不等式中错误的是 （　　）

A．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　B．$|a|>|b|$　C．$a^2<b^2$　D．$a^2>b^2$

8．某商品降价 10%后，想恢复原价，则应提价 （　　）

A．10%　B．9%　C．11%　D．$\frac{100}{9}\%$

9．函数 $y=\cos^2 x-3\cos x+2$ 的最大值为 （　　）

A．4　B．5　C．6　D．$\frac{7}{2}$

10．在 ΔABC 中，若 $2\sin A=\sin B+\sin C$，$a=2$，则三角形的周长为 （　　）

A．2　B．4　C．6　D．8

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=$ _____．

12．已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列，S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $9S_3=S_6$，则数列 $\{a_n\}$ 的

前5项的和等于_____.

13．不等式$|x-2|>1$的解集与不等式$x^2+ax+b>0$的解集相同，则$a+b=$_____.

14．若角θ的终边落在直线$y=-x$上，则$\sin 2\theta=$_____.

15．计算$2\lg 5+\lg 4+\lg 0.01=$_____.

三、解答题（本大题8小题，共90分）

16．（8分）化简：

（1）$\sin 315^\circ-\sin(-480^\circ)+\cos(-330^\circ)+\sin 135^\circ$；

（2）$\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)\cdot\cos(\dfrac{\pi}{2}+2)}{\cos(\pi-\alpha)\cdot\sin(3\pi-\alpha)\cdot\sin(-\alpha-\pi)}$.

17．（10分）若$\tan\theta=3$，求$\sin 2\theta-\cos 2\theta$的值.

18．（12分）已知二次函数$f(x)=x^2+2(m-2)x+m-m^2$.

（1）若函数的图像经过原点，且满足$f(2)=0$，求实数m的值；

（2）若函数在区间$[2,+\infty)$上为增函数，求实数m的取值范围.

19.（12 分）函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$（其中 $A>0$，$\omega>0$）的振幅为 2，周期为 π.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）求 $f(x)$ 的单调增区间；

（3）求 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的值域.

20.（12 分）已知 α，β 均为锐角，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，求 $\alpha-\beta$ 的值.

21.（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-8n$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；

（2）数列前多少项的和最小.

22.（12 分）在△ ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．a，b 是方程 $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ 的两个根，且 $2\cos(A+B)=1$．求：（1）角 C 的度数；（2）边 c 的长．

23.（12 分）某商品进货价格为 40 元 / 个，若销售价格为 50 元 / 个，可卖出 50 个，如果销售价格每涨 1 元，其销售量就减少 1 个，为了获得最大利润此商品的最佳售价为多少？

阶段测试卷（三）

考试时间：120 分钟　总分：150 分

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在下列每小题中，选出一个正确答案）

1．已知集合 $A=\{1,3^a\}$，$B=\{a,b\}$，若 $A\cap B=\{\frac{1}{3}\}$，则 $A\cup B=$　（　）

A．$\{\frac{1}{3},1,b\}$　　B．$\{\frac{1}{3},-1\}$　　C．$\{\frac{1}{3},1\}$　　D．$\{\frac{1}{3},-1,1\}$

2．函数 $y=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$a\geqslant 3$　　B．$a\leqslant -3$　　C．$a\leqslant 5$　　D．$a<-3$

3．设 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$(a-b)a^2<0$”是“$a<b$”的_____条件（　）

A．充分不必要　　B．必要不充分

C．充分必要　　D．既不充分也不必要

4．已知 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\leqslant -1)\\ x^2 & (-1<x<2)\\ 2x & (x\geqslant 2)\end{cases}$，若 $f(x)=3$，则 x 的值是（　）

A．1　　B．1或$\frac{3}{2}$　　C．1，$\frac{3}{2}$或$\pm\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{3}$

5．下列计算中，结果正确的是（　）

A．$(2^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}}=\sqrt{2^9}$　　B．$2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}=2$　　C．$(3^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}}=3$　　D．$2^{\frac{2}{3}}\div 2^{\frac{1}{3}}=2$

6．若 $\tan\theta=3$，则 $2\sin^2\theta+\sin 2\theta-\cos^2\theta=$（　）

A．$\frac{1}{7}$　　B．$\frac{4}{9}$　　C．$\frac{5}{2}$　　D．$\frac{23}{10}$

7．设 $f(z)=1-z$，$z_1=1+2\mathrm{i}$，$z_2=7-6\mathrm{i}$，则 $f(\overline{z_1-z_2})=$（　）

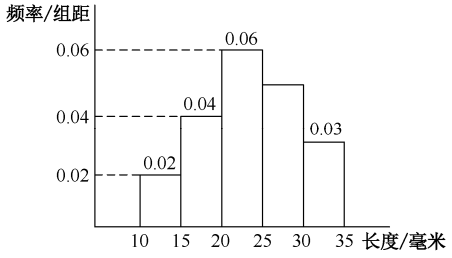
A．$7+8\mathrm{i}$　　B．$-7-8\mathrm{i}$　　C．$7-8\mathrm{i}$　　D．$-7+8\mathrm{i}$

8．已知向量 $\vec{a}=(-3,1)$，$\vec{b}=(2,-3)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的值是（　）

A．0　　B．3　　C．-9　　D．11

9．对一批产品的长度（单位：mm）进行抽样检测，题 9 图为检测结果的频率分布直方图．根据标准，产品长度在区间[20，25）上的为一等品，在区间[15，20）和区间[25，30）上的为二等品，在区间[10，15）和[30，35）上的为三等品．用频率估计概率，现从该批产品中随机抽取一件，则其为二等品的概率为（　）

A．0.09　　B．0.20　　C．0.25　　D．0.45



题 9 图

10．设 $a=3^{0.5}$，$b=\log_3 2$，$c=\cos 2$，则 （ ）

A．$c<b<a$　　B．$c<a<b$　　C．$a<b<c$　　D．$b<c<a$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．不等式 $ax^2+bx-2>0$ 的解集是(1，2)，则 a^2+b^2 的值等于_____.

12．$(a+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数等于 8，则实数 $a=$_____.

13．已知 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，α 是第二象限的角，则 $\cos(\pi-\alpha)=$_____.

14．在区间[0，π]上随机取一个数 x，则事件“$\tan x\cos x\geqslant\dfrac{1}{2}$”发生的概率为____.

15．若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\\ x+3y-3\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=3x-y$ 的最小值为_____.

三、解答题（本大题 8 小题，共 90 分）

16．（10 分）解不等式：$\log_2|3x-1|\leqslant 3$.

17．（10 分）2 名老师与 6 名学生一起排队，求：（1）一共有多少种排法？（2）若 6 名学生如果必须站在一起，有多少种排法？（3）若 2 名老师不能站在一起，有多少种排法？

18.（10 分）已知函数 $f(x)=2\cos x\sin(x+\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x$（$x\in\mathbf{R}$），（1）求函数的最小值及对应 x 的取值；（2）该函数的图像可由 $y=\sin x$（$x\in\mathbf{R}$）的图像经过怎样的变换得到？

19.（12 分）在△ ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足 $\cos\frac{A}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$．（1）求△ ABC 的面积；（2）若 $c=1$，求 a 的值．

20.（12 分）已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且对任意 a，$b\in\mathbf{R}$，都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，$f(0)=0$，且当 $x>0$ 时，$f(x)<0$ 恒成立．

证明：（1）函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数；（2）函数 $y=f(x)$ 是奇函数．

21.（12 分）某学校共有教师 360 人，分三批参加研修培训，在三个批次中男、女教师人数如下表所示：

	第一批次	第二批次	第三批次
女教师	86	x	y
男教师	94	66	z

已知在全体教师中随机抽取 1 名，抽到第二、三批次中女教师的概率分别是 0.15、0.1．

（1）求 x，y，z 的值；

（2）为了调查研修效果，现从三个批次中按 1∶60 的比例抽取教师进行问卷调查，三个批

次被选取的人数分别是多少?

（3）若从（2）中选取的教师中随机选出两名教师进行访谈，求参加访谈的两名教师“分别来自两个批次”的概率.

22.（12 分）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_n=\frac{1}{3}(a_n-1)$（$n\in\mathbf{N}^*$）．求：

（1）a_1，a_2；（2）数列$\{a_n\}$的通项.

23.（12 分）某外商到一开发区投资 72 万美元建起一座蔬菜加工厂，第一年各种支出经费 12 万美元，以后每年增加 4 万美元，每年销售蔬菜收入 50 万美元.

（1）若从投产到第n年的纯利润为$f(n)$，写出$f(n)$与n的关系式；

（2）从第几年开始盈利?

（3）若干年后，外商为开发新项目，在纯利润总和最大时，以 16 万元出售该厂，问共获利多少?

阶段测试卷（四）

考试时间：120 分钟　总分：150 分

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在下列每小题中，选出一个正确答案）

1．已知集合 $P=\{x\,|\,y=\log_2(x-3)\}$，$Q=\{y\,|\,y=\sqrt{x-2}\}$，则下列选项正确的是（　　）

A．$P=Q$　　B．$P\cap Q=\varnothing$　　C．$P\subsetneqq Q$　　D．$Q\subsetneqq P$

2．“$x-1>0$”是“$x^2-1>0$”_____条件（　　）

A．充要　　B．充分不必要　　C．必要不充分　　D．既不充分也不必要

3．若函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上偶函数，则 φ 可能的取值为（　　）

A．π　　B．2π　　C．$\dfrac{3\pi}{2}$　　D．0

4．向量 $\vec{a}=(x,1)$，$\vec{b}=(2,3)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\vec{a}+\vec{b}=$（　　）

A．$(2+x,4)$　　B．$(\dfrac{1}{2},4)$　　C．$(\dfrac{8}{3},4)$　　D．$(\dfrac{7}{2},4)$

5．已知 m，n 是两条不同的直线，α、β、γ 为三个不同的平面，则下列命题正确的是（　　）

A．若 $m\parallel n$，$m\subsetneqq\alpha$，则 $n\parallel\alpha$　　B．若 $m\parallel n$，$m\subsetneqq\alpha$，$n\subsetneqq\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$

C．若 $\alpha\perp\gamma$，$\alpha\perp\beta$，则 $\beta\parallel\gamma$　　D．若 $m\parallel n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$

6．三个数 $2^{0.3}$，$\log_5 2$，$\log_{0.5}2$ 的大小关系是（　　）

A．$2^{0.3}<\log_5 2<\log_{0.5}2$　　B．$\log_5 2<2^{0.3}<\log_{0.5}2$

C．$\log_{0.5}2<\log_5 2<2^{0.3}$　　D．$\log_{0.5}2<2^{0.3}<\log_5 2$

7．过椭圆 $9x^2+y^2=81$ 的一个焦点 F_1 的直线与椭圆交于 A、B 两点，则 A、B 与椭圆的另一个焦点 F_2 构成△ ABF_2 的周长为（　　）

A．9　　B．$8\sqrt{3}$　　C．12　　D．36

8．过点 $(2,1)$ 且被圆 $x^2+y^2-2x+4y=0$ 截得的最长弦所在直线方程为（　　）

A．$3x-y-5=0$　　B．$3x+y-7=0$　　C．$x+3y-5=0$　　D．$x-3y+1=0$

9．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，前 15 项的和 $S_{15}=90$，则 $a_8=$（　　）

A．5　　B．12　　C．6　　D．-6

10．双曲线过点 $(2,-2)$，且与 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 有相同的渐近线，则该双曲线方程为（　　）

A．$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　　B．$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　C．$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　D．$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．若 α 是钝角，且满足 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，则 $\cos\alpha$ 的值为_____.

12．实数 x、y 满足 $x^2+y^2-6x-6y+12=0$，则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为_____.

13．若 $(a-2\mathrm{i})\mathrm{i}=b-\mathrm{i}$（$a$，$b\in\mathbf{R}$），则 $a^2+b^2=$_____.

14．过点 $A(4,\ a)$ 和 $B(5,\ b)$ 的直线与直线 $y=x+m$ 平行，则 $|AB|$_____.

15．双曲线 $tx^2-y^2=1$ 的一条渐近线与直线 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}t\\ y=-t-1\end{cases}$（$t$为参数）垂直，则该双曲线的离心率为_____.

三、解答题（本大题 8 小题，共 90 分）

16．（10 分）已知函数 $f(x)=x^2-(a+1)x+b$.

（1）若 $f(x)<0$ 的解集是（-5，2），求 a，b 的值；

（2）在（1）下，解关于 x 的不等式 $f(x)>0$.

17．（10 分）已知函数 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 均有 $f(1)=n^2+n$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，并证明数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

（2）若 n 为偶数，且 $b_n=2^{f(-1)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18．（10 分）一圆形拱桥，现时水面宽为 22 米，拱高为 9 米，一艘高 7.5 米，顶宽 4 米的船，能从桥下通过吗？

19.（12 分）已知函数 $f(x)=4\cos x\sin(x+\frac{\pi}{6})-1$

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值并求相对应的 x 的取值.

20.（12 分）在 1，2，3，…，9 这 9 个自然数中，任取 3 个不同的数.

（1）求这 3 个数之和为 18 的概率；

（2）求这 3 个数是连续的自然数的概率.

21.（12 分）2010 年南非世界杯足球赛的一场比赛中，阿根廷队 10 号球员梅西从球门正前方 15 米处挑射，球的飞行方向正对球门，假设该球沿抛物线飞行，即球的高度 y（m）与球的水平飞行距离 x（m）之间满足二次函数关系，且已知当 $x=5$ 时，$y=6$，当 $x=7$ 时，$y=7$．求：

（1）该函数的解析式；

（2）已知球门横梁高 2.5 米，若球在飞行过程中无人阻挡，梅西此次射门能否进球？

22.（12 分）已知直线 m：$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$，椭圆 C 的中心在原点，焦点在 x 轴上，分别以直线 m 和两坐标轴的交点为其一个焦点和短轴的一个顶点.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）如果过椭圆 C 的右焦点的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点，且以 A，B 为直径的圆的圆心横坐标为 $\frac{4}{7}$，求直线 l 的方程；

（3）求出（2）中圆的方程.

23.（12 分）已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，动点 C 满足：$|AC|+|BC|+|AB|=2+2\sqrt{2}$.

（1）求动点 C 的轨迹方程；

（2）直线 l：$y=kx+\sqrt{2}$ 与（1）的轨迹有两个不同交点 P 和 Q，求 k 的取值范围；

（3）若点 M 和 N 为（1）的轨迹的长轴右端点和短轴的上端点，在（2）的条件下是否存在实数 k，满足 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 共线？若存在，求 k；若不存在，请说明理由.

阶段测试卷（五）

考试时间：120 分钟　总分：150 分

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在下列每小题中，选出一个正确答案）

1．设集合 $A=\{x\mid x(x-1)<0\}$，$B=\{x\mid 0<x<3\}$，则“$m\in A$”是“$m\in B$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

2．在复平面内，复数 $z=\sin 2+\mathrm{i}\cos 2$ 对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．函数 $f(x)=x^2+\sin x+1$（$x\in\mathbf{R}$），若 $f(a)=2$，则 $f(-a)$ 的值为（　　）

A．3　　B．0　　C．−1　　D．−2

4．已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数．令 $a=f(\sin\frac{2\pi}{3})$，$b=f(\cos\frac{2\pi}{3})$，$c=f(\tan\frac{\pi}{3})$，则下列正确的是（　　）

A．$b<a<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<c<a$　　D．$a<b<c$

5．已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=2$，设前 n 项和为 S_n，则 $\frac{S_4}{a_2}=$（　　）

A．2　　B．4　　C．$\frac{15}{2}$　　D．$\frac{17}{2}$

6．$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $c=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{6}$，$B=120^\circ$，则 $a=$（　　）

A．$\sqrt{6}$　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

7．设变量 x，y 满足约束条件：$\begin{cases}y\geqslant x\\ x+2y\leqslant 2\\ x\geqslant -2\end{cases}$，则 $z=x-3y$ 的最小值为（　　）

A．−2　　B．−4　　C．−6　　D．−8

8．已知 $(2a^3+\frac{1}{a})^n$ 的展开式的常数项是第七项，则正整数 n 的值为（　　）

A．8　　B．9　　C．10　　D．11

9．已知 m，n 是两条不同直线，α，β，γ 是三个不同平面，下列命题中正确的是（　　）

A．若 $m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha$，则 $m\parallel n$　　B．若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha\parallel\beta$

C．若 $m\parallel\alpha$，$m\parallel\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$　　D．若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m\parallel n$

10．过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左焦点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆于点 P，F_2 为右焦点，

若$\angle F_1PF_2=60°$，则椭圆的离心率为 （ ）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

二、填空题（本大题共5小题，每小题4分，共20分）

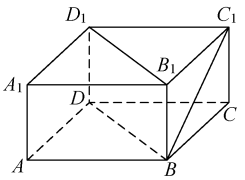
11．方程$2^{-x}+x^2=3$的实数解的个数为_____.

12．在三棱锥的六条棱中，任取两条，这两条棱是异面直线的概率是_____.

13．若向量$\vec{a}=(x，x+\frac{2}{3})$，$\vec{b}=(2x，-3)$的夹角为钝角，则实数$x$的取值范围为_____.

14．焦点在直线$\begin{cases}x=3+t\cos\frac{\pi}{4}\\ y=-2+t\sin\frac{\pi}{4}\end{cases}$上的抛物线的标准方程为_____.

15．如题15图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BC=2$，$AA_1=1$，则BC_1与平面BB_1D_1D所成角的正弦值为_____.



题15图

三、解答题（本大题共8小题，共90分）

16．（8分）为了对某课题进行研究，用分层抽样的方法从三所高校A，B，C相关人员中，抽取若干人组成研究小组，有关数据如下表（单位：人）.

高　校	相关人数	抽取人数
A	18	x
B	36	2
C	54	y

（1）求x和y；

（2）若从高校B，C抽取的人中选2人做专题发言，求这2人来自高校C的概率.

17．（8分）若函数$f(x)=\log_a x$（$a>0$且$a\neq1$）图像经过点$(2，-1)$.

（1）求a的值；

（2）若$f(x-1)>-1$，求x的取值范围.

18.（10 分）已知二次函数 $y=f(x)$ 在（$-\infty$，2] 上是增函数，在[2，$+\infty$）上是减函数，图像的顶点在直线 $y=x-1$ 上，并且图像经过点（-1，-8）.

（1）求二次函数 $y=f(x)$ 的解析式；

（2）使 $f(x)+m<0$ 恒成立的实数 m 的取值范围.

19.（12 分）在某一路段，车流速度 v（单位：千米/小时）是车流密度 x（单位：辆/千米）的函数．当车流密度达到180 辆/千米时，造成堵塞，此时车流速度为 0 千米/小时；当车流密度达到 20 辆/千米时，车流速度为 80 千米/小时．研究表明：当 $0\leqslant x\leqslant 180$ 时，车流速度 v 是车流密度 x 的一次函数.

（1）当 $0\leqslant x\leqslant 180$ 时，求函数 $v(x)$ 的表达式；

（2）当车流密度 x 为多大时，车流量（单位时间内通过桥上某观测点的车辆数，单位：辆/小时） $f(x)=x\cdot v(x)$ 可以达到最大，并求出最大值.

20.（12 分）已知函数 $f(x)=2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}-2\sqrt{3}\sin^2\frac{x}{4}+\sqrt{3}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期及最值；

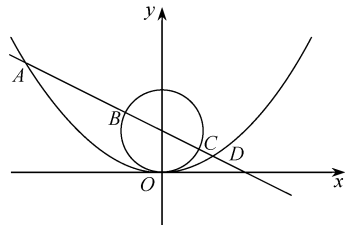
（2）令 $g(x)=f(x+\frac{\pi}{3})$，判断函数 $g(x)$ 的奇偶性，并说明理由.

21.（12 分）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_4=10$ 且 a_3，a_6，a_{10} 成等比数列，求数列 $\{a_n\}$ 前 20 项的和 S_{20} .

22.（12 分）已知抛物线的顶点在原点，焦点是圆 $x^2+y^2=6y$ 的圆心.

（1）求此抛物线的标准方程；

（2）过抛物线焦点且斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线与抛物线和圆分别交于 A、B、C、D 四点，求 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 的面积之和.



23．选做题：（请从下面四题中任选两题做答，多做不得分，如果多做，阅卷时只阅所答的前 2 道小题.）

Ⅰ.（8 分）2013 年 5 月 1 日，某华润苏果超市销售的商品如下：

①甲商品 200 件，销售价 5 元/件，成本价 3 元/件；

②乙商品 250 件，销售价 3.9 元/件，成本价 2.5 元/件；

③丙商品 300 件，销售价 4 元/件，成本价 3 元/件.

（1）制作销售表格，并在表中反映商品名称、数量、销售价、成本价、利润；

（2）试用数组的方法，求华润苏果超市这一天中甲、乙、丙三种商品的销售总利润.

Ⅱ.（8 分）某工程的横道图如下：

工序	工作名称	工时/天	1到7	8到14	15到21	22到28	29到35	36到42	43到47
A	前期设计	7							
B	旧屋拆件清理	5							
C	水电重新布线	7							
D	木工制作橱柜	20							
E	厨房、卫生间贴瓷砖	5							
F	刷墙面漆	10							
G	地板安装	2							
H	灯具安装、家具进新居	3							
进度标尺			47到41	40到34	33到27	26到20	19到13	12到6	5到1
星期			一到日	一到日	一到日	一到日	一到日	一到日	一到日
工程周			一	二	三	四	五	六	七

① 横道图显示，该工程的总工期为_____天.

② 该工程的关键路径为_____.

③ 开工后 16 天，监理前去工地检查，按照横道图显示工程应处于哪几道工序？

Ⅲ.（8 分）（1）如题 23-Ⅲ（1）图所示的程序框图，如果输入三个实数 a、b、c，要求输出这三个数中最大的数，那么在空白的判断框中，应该填入下面四个选项中的 （　　）

A．$c>x$　　B．$x>c$

C．$c>b$　　D．$b>c$

（2）阅读如题 23-Ⅲ（2）图所示的程序框图，则输出的 i 的值是 （　　）

A．3　　B．4

C．5　　D．6

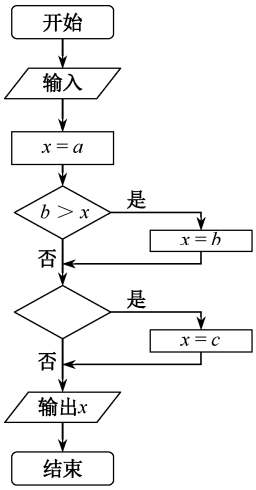
IV.（8 分）

（1）命题“p 或 q”、“$\neg p$”都是真命题，则下列结论正确的是（　　）

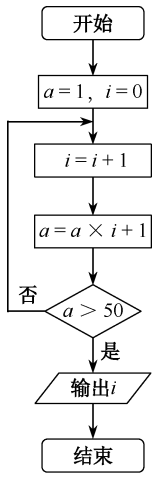
A．命题 p 不一定是假命题　　B．命题 q 一定是真命题

C．命题 q 不一定是真命题　　D．命题 p 与 q 的真假相同

（2）化简：① $\overline{\overline{A}B}+B$；② $\overline{0}\cdot 1\cdot\overline{1+0}$.



题 23-III（1）图



题 23-III（2）图

综合测试卷

考试时间：120 分钟　总分：150 分

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1．设集合 $A=\{1,2\}$，则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是　（　　）

A．1　　B．3　　C．4　　D．8

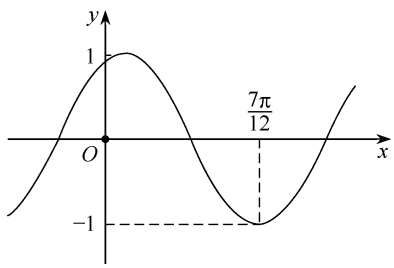
2．已知 $a=\log_2 3.6$，$b=\log_4 3.2$，$c=\log_4 3.6$ 则　（　　）

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$b>a>c$　　D．$c>a>b$

3．已知向量 $\vec{a}=(\sqrt{3},1)$，$\vec{b}$ 是不平行于 x 轴的单位向量，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}$，则 $\vec{b}=$（　　）

A．$(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$　　B．$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　　C．$(\frac{1}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4})$　　D．$(1,0)$

4．将函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$ 的图像按向量 $\vec{a}=(-\frac{\pi}{6},0)$ 平移，平移后的图像如题 4 图所示，则平移后的图像所对应函数的解析式是　（　　）



题 4 图

A．$y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$　　B．$y=\sin(x-\frac{\pi}{6})$

C．$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$　　D．$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

5．“$m=\frac{1}{2}$”是“直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直”的　（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．设 a、b 是两条不同的直线，α、β是两个不同的平面，则下列四个命题：①若 $a\perp b$，$a\perp\alpha$，则 $b//\alpha$；②若 $a//\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则 $a\perp\beta$；③若 $a\perp\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $a//\alpha$；④若 $a\perp b$，$a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，则$\alpha\perp\beta$ 中真命题的个数是　（　　）

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

7．若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点重合，则 p 的值为　（　　）

A．-2　　B．2　　C．-4　　D．4

8．设 $f(x)$ 为定义在 **R** 上的偶函数，且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，则 $f(-2)$，$f(-\pi)$，$f(3)$ 的大小顺序是　（　　）

A．$f(-\pi)>f(3)>f(-2)$　　B．$f(-\pi)>f(-2)>f(3)$

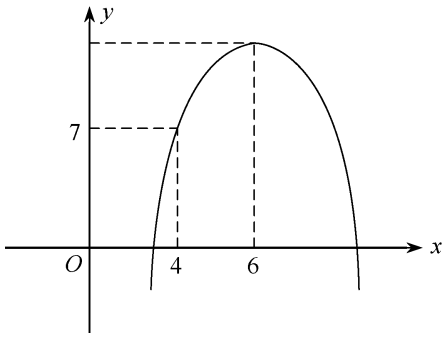
C．$f(-\pi)<f(3)<f(-2)$　　D．$f(-\pi)<f(-2)<f(3)$

9．一束光线从点 $A(-1,1)$ 出发，经 x 轴反射到圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 上的最短路径是 （　　）

A．4　　B．5　　C．$3\sqrt{2}-1$　　D．$2\sqrt{6}$

10．某汽车运输公司，购买了一批豪华大客车投入客运，据市场分析，每辆客车营运的总利润 y（万元）与营运年数 $x(x\in\mathbf{N})$ 为二次函数关系，如题 10 图所示，要使营运年平均利润最大，则每辆客车营运的年数应为 （　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6



题 10 图

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．若复数 $z=a-1+5\mathrm{i}$ 为纯虚数，其中 $a\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位，则 $\dfrac{a+\mathrm{i}^5}{1-a\mathrm{i}}=$_____.

12．$(x-\dfrac{1}{3\sqrt{x}})^{18}$ 的展开式中含 x^{15} 的项的系数为_____（结果用数值表示）.

13．已知 α，$\beta\in(\dfrac{3\pi}{4},\pi)$，$\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$，$\sin(\beta-\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{12}{13}$，则 $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=$_____.

14．若函数 $f(x)=a^x-m-1(a>1$ 且 $a\neq1)$ 的图像不经过第二象限，则 a 的取值范围是_____，m 的取值范围是_____.

15．若双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍，则 $m=$_____.

三、解答题（本大题共 8 小题，共 90 分）

16．（8 分）求函数 $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x-3}-2)}$ 的定义域.

17.（10 分）在△ABC 中，$BC=\sqrt{5}$，$AC=3$，$\sin C=2\sin A$.（1）求 AB 的值；（2）求 $\sin(2A-\frac{\pi}{4})$ 的值.

18.（10 分）成等差数列的三个正数的和等于 15，并且这三个数分别加上 2，5，13 后成为等比数列 $\{b_n\}$ 中的 b_3，b_4，b_5.（1）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；（2）设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：数列 $\{S_n+\frac{5}{4}\}$ 是等比数列.

19.（12 分）已知 $y=f(x)$ 是二次函数，且 $f(-\frac{3}{2}+x)=f(-\frac{3}{2}-x)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，$f(-\frac{3}{2})=49$，方程 $f(x)=0$ 的两实根之差等于 7.（1）求此二次函数的解析式；（2）求 $f(x)$ 在区间 $[t,\ t+1]$（$t\in\mathbf{R}$）上的最大值.

20.（12 分）甲、乙等五名志愿者被随机地分到 A、B、C、D 四个不同的岗位服务，每个岗位至少有一名志愿者.

（1）求甲、乙两人同时参加 A 岗位服务的概率；

（2）求甲、乙两人不在同一岗位服务的概率.

21.（10 分）某人需要补充维生素，现有甲、乙两种维生素胶囊，这两种胶囊都含有维生素 A、C、D、E 和最新发现的 Z. 甲种胶囊每粒含有维生素 A、C、D、E、Z 分别是 1mg、1mg、4mg、4mg、5mg；乙种胶囊每粒含有维生素 A、C、D、E、Z 分别是 3mg、2mg、1mg、3mg、2mg. 如果此人每天摄入维生素 A 至多 19mg，维生素 C 至多 13mg，维生素 D 至多 24mg，维生素 E 至少 12mg，那么他每天应服用两种胶囊各多少粒才能满足维生素的需要量，并能得到最大量的维生素 Z.

22.（12 分）已知椭圆 C 的中心在原点，左焦点为 $F(-1,0)$，准线方程为 $x=\pm 2$.

（1）求椭圆的方程；（2）设过点 F 的直线 l 交椭圆于 A、B 两点，并且线段 AB 的中点在直线 $x-y=0$ 上，求直线 AB 的方程；（3）求过点 O、F，并且与椭圆的左准线相切的圆的方程.

23.（16 分）选做题：下面 4 题选做 2 题，全做以选做的前 2 题计分.

Ⅰ.（1）把二进制数 $(11111)_2$ 换算成十进制数为 （　　）

A．29　　B．30

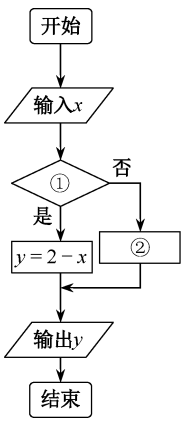
C．31　　D．32

（2）逻辑代数式中，不正确的是 （　　）

A．$A+A=A$　　B．$A+AB=A$

C．$A+\overline{A}=1$　　D．$A+A\overline{B}=1$

Ⅱ．已知函数 $y=\begin{cases}\log_2 x & x\geqslant 2\\ 2-x & x<2\end{cases}$，如题 23-Ⅱ图所示为给定 x 的值，求其对应的函数值 y 的程序框图.



题 23-Ⅱ图

①处应填写_____；

②处应填写_____.

Ⅲ．某西餐厅某天午餐销售情况如下表所示：

食 品 名 称	单价/（元/份）	销量/份
薯条	7	120
甜筒	4	45
沙拉	12	25
汉堡包	10	130
饮料	8	100

（1）甜筒的销售额比沙拉的销售额少_____元；

（2）该餐厅这一天午餐的营业收入为_____元.

Ⅳ．某项工作的各项安排如下：

工 作 代 码	紧 前 工 作	工期/天
A	无	2
B	A	3
C	A	2
D	B	1
E	C	1
F	D，E	3

（1）画出工作流程图；

（2）指出关键路径及总工期.

专题测试卷参考答案

专题一　集合　测试卷

一、选择题

1．D　　2．A　　3．C　　4．A　　5．C　　6．C

二、填空题

7．$\{y\,|\,y\geqslant -1\}$　　8．$\{x\,|\,-1\leqslant x<2\}$　　9．$\{(x,\ y)\,|\,xy\leqslant 0\}$　　10．2或8

三、解答题

11．【解】∵ $A\cap B=\{-\frac{1}{3}\}$，∴ $-\frac{1}{3}\in A$，$-\frac{1}{3}\in B$，

得 $3\times(-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}p-5=0$，即 $p=-14$，

$3\times(-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}\times 10+q=0$，即 $q=3$，

由上得 $A=\{-\frac{1}{3},\ 5\}$，$B=\{-3,\ -\frac{1}{3}\}$

所以 $\complement_U A=\{-3\}$，$\complement_U B=\{5\}$．

12．【解】（1）由题意得：$A=\{x\,|\,-2<x<3\}$，$B=\{x\,|\,m<x<9+m\}$，

∵ $A\cup B=B$，∴ $A\subseteq B$，得：$m\leqslant -2$

所以实数 m 的取值范围是 $\{m\,|\,m\leqslant -2\}$．

（2）∵ $A\cap B=\varnothing$，$m+9\leqslant -2$或$m\geqslant 3$，

解得：$m\leqslant -11$或$m\geqslant 3$，

所以实数 m 的取值范围是 $\{m\,|\,m\leqslant -11$或$m\geqslant 3\}$．

专题二　不等式　测试卷

一、选择题

1．C　　2．A　　3．D　　4．C　　5．B

6．C【解析】不等式组表示的平面区域阴影部分，三个顶点坐标为 $A(0,\ 4)$，$B(0,\ \frac{4}{3})$，$C(1,\ 1)$，面积为 $\frac{1}{2}\times(4-\frac{4}{3})\times 1=\frac{4}{3}$．

二、填空题

7．$(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ 3]$　　8．3　　9．$(-4,\ 1)\cup(1,\ 2)$　　10．2、0

三、解答题

11．【解】由题意得：$\begin{cases}2x^2+x-3\geqslant 0\\ 3+2x-x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2+x-3\geqslant 0\\ x^2-2x-3<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -\frac{3}{2}\text{或}x\geqslant 1\\ -1<x<3\end{cases}$，

得：$1\leqslant x<3$

所以函数 $f(x)=\sqrt{2x^2+x-3}+\log_3(3+2x-x^2)$ 的定义域为[1，3)．

12．【解】设应隔出大房间 x 间、小房间 y 间，则

$\begin{cases}18x+15y\leqslant 180\\1000x+600y\leqslant 8000\\x\in\mathbf{N}\\y\in\mathbf{N}\end{cases}$，目标函数 $z=5\times 40x+3\times 50y$，作出可行域，

根据目标函数 $z=200x+150y$，平移直线 l，当此直线经过直线 $18x+15y=180$ 和直线 $1000x+600y=8000$ 的交点$(\frac{20}{7},\frac{60}{7})$时，$z=200x+150y=\frac{13000}{7}$．

由于$(\frac{20}{7},\frac{60}{7})$不是整数，所以经过整点(3，8)时，才是它们的最优解，同时经过整点(0，12)也是最优解，即应隔出大房间3间、小房间8间或应隔出大房间0间、小房间12间，所获利益最大，如果考虑到不同客人的需要，应隔出大房间3间、小房间8间．

专题三　数列　测试卷

一、选择题

1．C　　2．D　　3．D　　4．D　　5．A　　6．B

二、填空题

7．$\pm 2\sqrt{3}$　　8．387　　9．4，8，16 或 16，8，4　　10．$-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$

三、解答题

11．【解】由题意可设奇数项为 $a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$，偶数项为 $\frac{b}{q}$，b，bq，中间项是 b，则

$\begin{cases}a-3d+a+3d+b=27\\a-3d+a-d+a+d+a+3d-\frac{b}{q}\cdot b\cdot bq=42\end{cases}$，化简得

$\begin{cases}2a+b=27\\4a-b^3=42\end{cases}\Rightarrow b=2$，所以中间项是 2．

12．【解】设每年存入银行 x 万元，依题意有，$\frac{x[1-1.04^6]}{1-1.04}\geqslant 50$，解得 $x\geqslant 7.54$．

答：每年至少须存入银行 7.54 万元人民币，才能使其在 2013 年初连本带息不少于 50 万元人民币．

专题四　函数　测试卷

一、选择题

1．C　　2．D　　3．C　　4．A　　5．A　　6．B

二、填空题

7．$\{x\,|\,-3<x<2\}$　　8．（1，4）　　9．6　　10．6

三、解答题

11．【解】∵ $f(3)=3$，　∴ $9+3(a+1)+b=3$，　即 $3a+b=-9$

又∵ $f(x)\geqslant x$ 恒成立，即 $x^2+ax+x+b\geqslant x$　$x^2+ax+b\geqslant 0$

∴ $\Delta=a^2-4b\leqslant 0$，　又∵ $b=-3a-9$，　∴ $\Delta=a^2-4(-3a-9)\leqslant 0$，

即 $(a+6)^2\leqslant 0$，∴ $a=-6$，$b=9$.

12．【解】（1）$x^2+2x-3>0\Rightarrow x<-3$或$x>1$

所以函数的定义域为$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

（2）∵ $0<0.3<1$

∴ $\begin{cases}x^2+2x-3\leqslant x^2-4\\ x^2+2x-3>0\end{cases}\Rightarrow\{x\,|\,x<-3\}$.

专题五　三角函数　测试卷

一、选择题

1．D　　2．B　　3．B　　4．D　　5．A　　6．D

二、填空题

7．−2　　8．$\frac{100\pi}{3}\,\text{cm}^2$　　9．$-\frac{1}{3}$　　10．7

三、解答题

11．【解】（1）∵ $b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$，由正弦定理得 $\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos B$，

得 $\tan B=\sqrt{3}$，∴ $B=\frac{\pi}{3}$.

（2）$\sin C=2\sin A$，由正弦定理得 $c=2a$，由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

解得 $a=\sqrt{3}$，$c=2a=2\sqrt{3}$.

12．【解】（1）因为函数 $f(x)$ 的最大值是 1，且 $A>1$，所以 $A=1$.

因为函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π，且 $\omega>0$，

所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$，解得 $\omega=1$.

所以 $f(x)=\sin(x+\varphi)$.

因为函数 $f(x)$ 的图像经过点 $M(0,1)$，所以 $\sin\varphi=1$.

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.　所以 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$.

（2）由（1）得 $f(x)=\cos x$，所以 $f(A)=\cos A=\frac{3}{5}$，　$f(B)=\cos B=\frac{5}{13}$.

因为 A，$B\in(0,\pi)$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4}{5}$，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{12}{13}$.

因为 A，B，C 为△ ABC 的三个内角，

所以 $\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)$，

所以 $f(C)=\cos C=-\cos(A+B)=-(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$

$=-(\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{12}{13})=\frac{33}{65}$.

专题六　概率统计　测试卷

一、选择题

1．D　2．A　3．C　4．A　5．C　6．B

二、填空题

7．$\frac{10}{x}$　8．450kg　9．$\frac{8}{3}$　10．$\frac{13}{15}$

三、填空题

11．【解】（1）$C_4^2=6$；（2）$C_3^2=3$；（3）$P=\frac{5}{C_4^2}=\frac{5}{6}$.

12．【解】（1）依题意知第三组的的频率为 $\frac{4}{2+3+4+6+4+1}=\frac{1}{5}$，

又因为第三组的频数为 12，

∴本次活动的参评作品数为 $\frac{12}{\frac{1}{5}}=60$（件）.

（2）根据频率分布直方图，可以看出第四组上交的作品数量最多，

共有 $60\times\frac{6}{2+3+4+6+4+1}=18$（件）.

（3）第四组的获奖率是 $\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$，

第六组上交的作品数量为 $60\times\frac{1}{2+3+4+6+4+1}=3$（件）.

∴第六组的获奖率为 $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$，显然第六组的获奖率较高.

专题七　平面向量及复数　测试卷

一、选择题

1．A　2．B　3．C　4．D　5．D　6．C

二、填空题

7．$\frac{8}{3}$　8．1　9．$-\frac{2}{3}$　10．$\frac{\pi}{4}$

三、解答题

11.【解】$z=-\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，$1+z+z^2+\cdots+z^{2014}=\dfrac{1-\mathrm{i}^{2015}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$.

12.【证明】（1）$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}+(-1)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$

$\therefore \vec{a}\perp\vec{b}$.

【解】（2）$\because \vec{x}=\vec{a}+(t-3)\vec{b}$，$\vec{y}=-k\vec{a}+t\vec{b}$，

$\therefore \vec{x}=(\sqrt{3}+\dfrac{t-3}{2},\ -1+\dfrac{\sqrt{3}(t-3)}{2})$，$\vec{y}=(-\sqrt{3}k+\dfrac{t}{2},\ k+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)$，

又$\because \vec{x}\perp\vec{y}$，$\therefore \vec{x}\cdot\vec{y}=0$即

$(\sqrt{3}+\dfrac{t-3}{2})(-\sqrt{3}k+\dfrac{t}{2})+(-1+\dfrac{\sqrt{3}(t-3)}{2})(k+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)=0$，

化简整理得：$k=\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{3}{4}t$.

（3）由（2）函数$k=\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{3}{4}t$的单调区间为：$(-\infty,\ \dfrac{3}{2}]$为单调减区间，$[\dfrac{3}{2},\ +\infty)$为单调增区间.

专题八　平面解析几何　测试卷

一、选择题

1．D　　2．C　　3．D　　4．B　　5．A　　6．B

二、填空题

7．$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　8．$\dfrac{4x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　9．$\dfrac{5}{2}$　　10．4

三、解答题

11.【解】（1）过椭圆右焦点且倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$的直线方程为：$y=x-1$

设$A(x_1,\ x_2)$，$B(y_1,\ y_2)$，由$\begin{cases}y=x-1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得$7x^2-8x-8=0$，

根据韦达定理，$x_1+x_2=\dfrac{8}{7}$，$x_1x_2=-\dfrac{8}{7}$

所以弦长$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\dfrac{12}{7}\sqrt{2}=\dfrac{24}{7}$

即弦AB的长为$\dfrac{24}{7}$.

（2）点$F_1(-1,\ 0)$到直线AB：$x-y-1=0$的距离$d=\dfrac{|-1-0-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

所以 $S_{\triangle ABF_1}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{12\sqrt{2}}{7}$.

12.【解】（1）设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

根据题意可得 $\begin{cases}(-2-a)^2+(0-b)^2=r^2\\(0-a)^2+(2-b)^2=r^2\\a=b\end{cases}$，解之得 $a=0$，$b=0$，$r=2$

所以圆的方程为 $x^2+y^2=4$.

（2）设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，$\overrightarrow{OP}=(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{OQ}=(x_2,\ y_2)$

联立 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\y=kx+1\end{cases}$，得 $(1+k^2)x^2+2kx-3=0$

$\Delta=4k^2-4(1+k^2)(-3)>0=4k^2+3>0$，则 $k\in\mathbf{R}$

$x_1+x_2=-\frac{2k}{1+k^2}$，$x_1x_2=-\frac{3}{1+k^2}$，$y_1y_2=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=\frac{-3k^2+1}{1+k^2}$

因为 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=-\frac{3}{1+k^2}+\frac{-3k^2+1}{1+k^2}=-2\Rightarrow k=0$.

专题九　立体几何　测试卷

一、选择题

1．D　　2．C　　3．B　　4．A　　5．C　　6．B

二、填空题

7．90°　　8．$4\sqrt{3}\pi$　　9．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　10．$\frac{\sqrt{2}}{3}$

三、解答题

11．（1）【证明】 ∵ AB 是底面直径

∴ $BE\perp AE$，又 $AD\perp$底面 ABE

∴ $BE\perp AD$

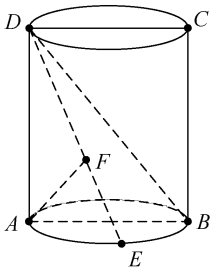
∴ $BE\perp$面 DAE

∴ $AF\perp BE$

又 $AF\perp DE$

∴ $AF\perp$面 DBE

∴ $AF\perp DB$.



（2）【解】设 E 到截面 $ABCD$ 的距离为 d

$$\frac{V_{柱}}{V_{锥}}=\frac{\pi\cdot a^2\cdot AD}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot AE\cdot BE\cdot AD}=3\pi$$

∴ $AE\cdot BE=2a^2=d\cdot 2a$

∴ $d=a$.

12.（1）【证明】在△ PAB 与△ CAB 中，

$\because PA=CA=8$，$\angle PAB=\angle CAB=60^\circ$，

$\therefore$△ $PAB\cong$△ CAB，$\therefore PB=BC$

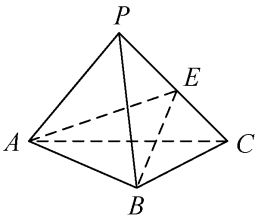
$\therefore$△ PAC 与△ PBC 都是以 PC 为底的等腰三角形

取 PC 的中点 E，连接 AE，BE

则 $PC\perp AE$，$PC\perp BE$

$\therefore PC\perp$平面 ABE

$\therefore PC\perp AB$.



（2）【解】在△ ABC 中，

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$

$=12^2+8^2-2\times12\times8\cos60^\circ=112$

在△ PAC 中，$\because PA=AC$，$\angle PAC=60^\circ$

$\therefore$△ PAC 为等边三角形

$\therefore PC=8$，$AE=4\sqrt{3}$

在 Rt△ BCE 中，$BE=\sqrt{BC^2-(\frac{PC}{2})^2}=4\sqrt{6}$

$\therefore AE^2+BE^2=48+96=144=AB^2$

$\therefore\angle AEB=90^\circ$

$\therefore S_{\triangle AEB}=\frac{1}{2}AE\cdot BE=24\sqrt{2}$

$\because PC\perp$平面 ABE

$\therefore V_{P-ABC}=V_{P-ABE}+V_{C-ABE}=\frac{1}{3}PC\cdot S_{\triangle ABE}=64\sqrt{2}$

即三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $64\sqrt{2}$.

专题十　选考内容　测试卷

一、选择题

1．B　2．B　3．A　4．B　5．B　6．（1）B　（2）C

二、填空题

7．101110　8．0，0 或 1，1　9．8，13　10．710，2400.1，445

二、解答题

11．【解】**方法一：**（真值表法）

A	B	$A+B$	$\overline{A}$	$\overline{A}B$	$A+\overline{A}B$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

方法二：逻辑运算律法

$$A+\overline{A}B=(A+\overline{A})(A+B) \quad \text{（分配律）}$$
$$=1(A+B) \quad \text{（互补律）}$$
$$=A+B \quad \text{（自等律）}$$

12.【解】①成本表如下：

名　称	数　量	单　价	金额/元
青菜心	300 克	4 元/公斤	1.2
蘑　菇	100 克	12 元/公斤	1.2
调味品			0.85
合　计			3.25

② 3.25（1+50%）=4.875≈5（元）.

阶段测试卷参考答案

阶段测试卷（一）

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	D	C	D	A	B	C	B	D

二、填空题

11．0 或$\frac{1}{4}$　　12．正　　13．π　　14．27　　15．-2，2，6，18

三、解答题

16.【解】由实数 a 组成的集合为 $\{0,2,3\}$.

17.【解】$A=[1,2]$，$B=\{x\mid(x-a)(x-1)\leqslant 0\}$

当 $a\leqslant 1$ 时，$B=[a,1]$；当 $a>1$ 时 $B=[1,a]$.

（1）当 $a>2$ 时，$A\subset B$.

（2）当 $1\leqslant a\leqslant 2$ 时，$A\supseteq B$.

（3）当 $a\leqslant 1$ 时，$A\cap B$ 仅含一个元素.

18.【解】（1）由 $|3x-4|\leqslant 19\Rightarrow 4-19\leqslant 3x\leqslant 4+19\Rightarrow -5\leqslant x\leqslant\frac{23}{3}$，

原不等式解集为 $[-5,\frac{23}{3}]$.

（2）$|\frac{x-1}{2}+4|>3\Rightarrow|x+7|>6\Rightarrow x<-13$或$x>-1$，

原不等式的解集为 $(-\infty,-13)\cup(-1,+\infty)$.

（3）$30+7x-2x^2<0\Rightarrow 2x^2-7x-30>0\Rightarrow x<-\frac{5}{2}$或$x>6$，

原不等式的解集为 $(-\infty,-\frac{5}{2})\cup(6,+\infty)$.

（4）$\because\Delta=25-48=-23<0$，故原不等式解集为 $\mathbf{R}$.

19.【证明】设 $f(x)=ax^2+bx+c$ （$a>0$），由 $p>0$，$q>0$ 且 $p+q=1$，则

$$f(px+qy)=a(px+qy)^2+b(px+qy)+c$$
$$=p(ax^2+bx+c)+q(ay^2+by+c)+2apqxy$$

所以 $pf(x)+qf(y)-f(px+qy)=-2apqxy>0$

所以 $f(px+qy)<pf(x)+qf(y)$.

20.【解】设生产甲、乙两种棉纱分别为 x 吨、y 吨，利润总额为 z 元，

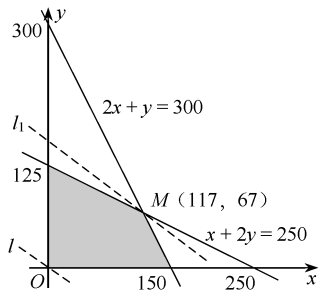
则 $\begin{cases}2x+y\leqslant 300\\ x+2y\leqslant 250,\ z=600x+900y\\ x,\ y\geqslant 0\end{cases}$

作出以上不等式组所表示的平面区域（见答题 20 图），即可行域.

作直线 l：$600x+900y=0$，即直线 l：$2x+3y=0$，把直线 l 向右上方平移至 l_1 的位置时，直线经过可行域上的点 M，且与原点距离最大，此时 $z=600x+900y$ 取最大值. 解方程组

$\begin{cases}2x+y=300\\x+2y=250\end{cases}$，得 M 的坐标为

$x=\dfrac{350}{3}\approx117$，$y=\dfrac{200}{3}\approx67$.



答题 20 图

答：应生产甲种棉纱 117 吨，乙种棉纱 67 吨，能使利润总额达到最大.

21.【解】（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，则

$$a_3\ b_3=(a_1+2d)\cdot\frac{1}{3a_1+3d}=\frac{1}{2},$$

$S_3+S_5=8a_1+13d=21$，解得 $a_1=d=1$，

$\therefore a_n=n$，$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$b_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$.

（2）$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=2[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=2(1-\frac{1}{n+1})<2$.

22.【解】（1）当 $n=1$ 时 $a_1=S_1=1$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$

由于 $n=1$ 时符合公式，$\therefore a_n=2n-1$.

（2）$T_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{9}+\dfrac{5}{27}+\cdots+\dfrac{2n-1}{3^n}$，

$\therefore\dfrac{1}{3}T_n=\dfrac{1}{9}+\dfrac{3}{27}+\cdots+\dfrac{2n-3}{3^n}+\dfrac{2n-1}{3^{n+1}}$，

两式相减得

$$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^{n-1}})-\frac{2n-1}{3^{n+1}},$$

$$\therefore T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{n-1}})-\frac{2n-1}{2\cdot3^n}=1-\frac{1}{2\cdot3^{n-1}}-\frac{2n-1}{2\cdot3^n}<1.$$

23.【解】设相邻两层楼梯长为 a，则

$S=a[(1+2+\cdots\cdots+k-1)+0+(1+2+\cdots\cdots+(n-k)]$

$=a[k^2-(n+1)k+\dfrac{n^2+n}{2}]$

当 n 为奇数时，取 $k=\dfrac{n+1}{2}$，S 达到最小值；

当 n 为偶数时，取 $k=\dfrac{n}{2}$ 或 $\dfrac{n+2}{2}$，S 达到最小值.

阶段测试卷（二）

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	D	C	B	C	C	D	C	C

二、填空题

11．$\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　12．31　　13．-1　　14．-1　　15．0

三、解答题

16．【解】（1）原式$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}$．

（2）原式$=\frac{-\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot(-\sin\alpha)}{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\sin\alpha}=1$．

17．【解】$\because \sin 2\theta-\cos 2\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$（$\cos\theta\neq 0$）

$=\frac{2\tan\theta-1+\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}$

又$\because \tan\theta=3$，$\therefore$上式$=\frac{6-1+9}{9+1}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$．

18．【解】（1）$\because f(x)$的图像过原点，

$\therefore f(0)=0$，即$m-m^2=0$　　①

又$\because f(2)=0$，$4+4(m-2)+m-m^2=0$　　②

$\therefore$由①②得$m=1$．

（2）$\because$函数在$[2,+\infty)$为增函数

$\therefore -\frac{b}{2a}=-\frac{2(m-a)}{2}\leqslant 2$，即$m\geqslant 0$．

19．【解】（1）$\because A>0$且振幅为2，　$\therefore A=2$

又$\because T=\pi$，$\omega>0$，$\therefore \frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore \omega=2$

$\therefore f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$．

（2）$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$

$\therefore k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant 1<k\pi+\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$

$\therefore f(x)$的单调增区间为$[k\pi-\frac{5\pi}{12},\ k\pi+\frac{\pi}{12}]$，$k\in\mathbf{Z}$．

（3）$\because x\in[-\frac{\pi}{2},\ 0]$，$\therefore -\frac{2\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}$

$\therefore -1 \leqslant \sin(2x+\frac{\pi}{3}) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore -2 \leqslant 2\sin(2x+\frac{\pi}{3}) \leqslant \sqrt{3}$，即函数的值域为$[-2,\sqrt{3}]$.

20.【解】$\because \alpha$，β 均为锐角

又$\because \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\because \cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$，$\therefore \sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

又$\because \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

又$\because \alpha$，β 为锐角，$\sin(\alpha-\beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$，$\therefore \alpha-\beta = -\frac{\pi}{4}$.

21.【解】（1）$\because S_n = n^2 - 8n$，

$\therefore$ 当 $n=1$ 时，$a_1 = S_1 = -7$

当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2-8n) - [(n-1)^2 - 8(n-1)] = 2n-9$

综上得 $a_n = 2n-9$.

（2）$S_n = n^2 - 8n = (n-4)^2 - 16$，$\therefore$ 当 $n=4$ 时，S_n 有最小值

$\therefore$ 数列前 4 项的和最小，最小为 -16.

22.【解】（1）$\because 2\cos(A+B) = 1$，$\therefore 2\cos(\pi - C) = 1$，$\therefore \cos C = -\frac{1}{2}$，$\therefore C = 120°$.

（2）$\because a$，b 是方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ 的两个根

$\therefore a+b = 2\sqrt{3}$，$ab = 2$

又$\because c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = (a+b)^2 - 2ab - 2ab\cos C = 10$

$\therefore c = \sqrt{10}$.

23.【解】设最佳售价为 x 元 / 个，利润为 y，则实际卖出的个数为 $50-(x-50)$

$y = (x-40)[50-(x-50)]$ （$x \in \mathbf{Z}$，$x \geqslant 50$）

$= -x^2 + 140x - 4000 = -(x-70)^2 + 900$

$\therefore$ 当售价为 70 元时，利润最大为 900 元.

阶段测试卷（三）

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	A	D	B	D	A	C	D	A

二、填空题

11．10　　12．2　　13．$\frac{12}{13}$　　14．$\frac{2}{3}$　　15．-1

三、解答题

16.【解】$\begin{cases}|3x-1|\leqslant 8\\ |3x-1|\neq 0\end{cases}$，解得$-\frac{7}{3}\leqslant x\leqslant 3$且$x\neq\frac{1}{3}$

所以不等式的解集是$[-\frac{7}{3},\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},3]$.

17.【解】（1）$A_8^8=40320$；（2）$A_6^6A_3^3=4320$；（3）$A_6^6A_7^2=15120$.

18.【解】$f(x)=2\cos x(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)-\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x$

$=2\sin x\cos x+\sqrt{3}(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

（1）函数的最小值为–2，此时$2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

（2）①由$y=\sin x$的图像向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位得$y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$图像，

②再保持图像上各点纵坐标不变，横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$得$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$图像，

③再保持图像上各点横坐标不变，纵坐标变为原来的2倍得$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$图像。

19.【解】（1）$\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1=2\times(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2-1=\frac{3}{5}$.

又$A\in(0,\pi)$，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4}{5}$，而

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=\frac{3}{5}bc=3$，得$bc=5$，

所以△ABC的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{4}{5}=2$.

（2）由（1）知$bc=5$，而$c=1$，所以$b=5$

所以$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{25+1-2\times 3}=2\sqrt{5}$.

20.【证明】（1）设$x_1>x_2$，则$x_1-x_2>0$，而$f(a+b)=f(a)+f(b)$

$\therefore f(x_1)=f(x_1-x_2+x_2)=f(x_1-x_2)+f(x_2)<f(x_2)$

$\therefore$函数$y=f(x)$是$\mathbf{R}$上的减函数.

（2）由$f(a+b)=f(a)+f(b)$得$f(x-x)=f(x)+f(-x)$

即$f(x)+f(-x)=f(0)$，而$f(0)=0$

$\therefore f(-x)=-f(x)$，即函数$y=f(x)$是奇函数.

21.【解】（1）$x=360\times 0.15=54$，$y=360\times 0.1=36$

$z=360-86-54-36-94-66=24$.

（2）由题意知，三个批次的人数分别是180，120，60，所以被选取的人数分别为3，2，1.

（3）“分别来自两个批次”的概率 $P=1-\dfrac{C_2^2+C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{11}{15}$.

22.【解】（1）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\dfrac{1}{3}(a_1-1)$，所以 $a_1=-\dfrac{1}{2}$

当 $n=2$ 时 $a_1+a_2=S_2=\dfrac{1}{3}(a_2-1)$，所以 $a_2=\dfrac{1}{4}$.

（2）$n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{3}(a_n-1)-\dfrac{1}{3}(a_{n-1}-1)\Rightarrow 2a_n=-a_{n-1}$

$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=-\dfrac{1}{2}$

所以 $\{a_n\}$ 是一个等比数列，$a_n=(-\dfrac{1}{2})^n$.

23.【解】（1）由题意知，每年支出的经费是以 12 为首项，4 为公差的等差数列，所以

$f(n)=50n-[12n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 4]-72=-2n^2+40n-72$（$n\in\mathbf{N}$）.

（2）盈利就是要求 $f(n)>0$，$\therefore f(n)=-2n^2+40n-72>0$，解得 $2<n<18$.

由 $n\in\mathbf{N}$ 知从第三年开始盈利.

（3）$f(n)=-2n^2+40n-72=-2(n-10)^2+128$

当 $n=10$ 时，$f(n)$ 的最大值为 128，共获利 $128+16=144$（万美元）.

阶段测试卷（四）

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	C	B	D	C	D	A	C	C

二、填空题

11．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　12．$3+2\sqrt{2}$　　13．5　　14．$\sqrt{2}$　　15．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

三、解答题

16.【解】（1）因为 $f(x)<0$，即 $x^2-(a+1)x+b<0$

又因为解集是（-5，2），所以 $\begin{cases}a+1=-3\\ b=-10\end{cases}$，得 $a=-4$，$b=-10$.

（2）因为 $a=-4$，$b=-10$，所以 $x^2-(a+1)x+b>0$ 即为 $x^2+3x-10>0$

解得 $x>5$ 或 $x<-2$

所以不等式的解集为（$-\infty$，-2）$\cup$（5，$+\infty$）.

17.【解】（1）由题知 $f(1)=a_1+a_2+a_3+a_n=n^2+n$

即 $S_n=n^2+n$

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$

当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n$

检验：$n=1$ 时，$2\times 1 = 2 = a_1$

所以 $a_n = 2n$（$n \in \mathbf{N}^*$）.

又因为 $a_{n+1} - a_n = 2$，所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

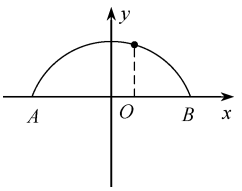
（2）$b_n = 2^{f(-1)} = 2^{-a_1+a_2-a_3+a_4+\cdots-a_{n-1}+a_n} = 2^{(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})}$

因为 n 为偶数，所以

$b_n = 2^{-a_1+a_2-a_3+a_4+\cdots-a_{n-1}+a_n} = 2^{(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})} = 2^{\frac{n}{2}d} = 2^n$

$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

18.【解】建立如图坐标系，则 $A(-11, 0)$，$B(11, 0)$，$C(0, 9)$



答题 18 图

设圆的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$，将三个点代入，

可求得圆的方程为 $x^2 + (y + \frac{20}{9})^2 = (\frac{101}{9})^2$，

故 D 点的坐标为 $(2, y_1)$，则 $(y_1 + \frac{20}{9})^2 = (\frac{101}{9})^2 - 4$，解得 $y_1 \approx 8.82$（取 $y_1 > 0$）

所以 $y_1 > 7.5$，因此船能从桥下通过.

19.【解】（1）$f(x) = 4\cos x \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1 = 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 1$

$= \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$

所以 $T = \pi$.

（2）因为 $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{6} \leqslant 2x + \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{2\pi}{3}$

所以当 $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = 1$ 时，$y_{\max} = 2$，此时 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$，即 $x = \frac{\pi}{6}$.

20.【解】（1）设事件 $A = \{3\text{个数之和是}18\}$，$P(A) = \frac{4+2+1}{C_9^3} = \frac{1}{12}$.

（2）设事件 $B = \{3\text{个数是连续自然数}\}$，$P(B) = \frac{7}{C_9^3} = \frac{1}{12}$.

21.【解】（1）设 $y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$），由题意得 $(0, 0)$，$(5, 6)$，$(7, 7)$ 在其图像上，

则 $\begin{cases} c = 0 \\ 25a + 5b + c = 0 \\ 49a + 7b + c = 0 \end{cases}$，解得 $a = -\frac{1}{10}$，$b = \frac{17}{10}$，$c = 0$

所以 $f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{17}{10}x$.

（2）当 $x = 15$ 时，$y = 3 > 2.5$，

所以梅西此次射门不能进球.

22.【解】（1）直线 m 和坐标轴相交于 $(-1, 0)$，$(0, \sqrt{3})$

所以 $c=1$，$b=\sqrt{3}$，所求的椭圆为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）由题意知直线 l 的斜率 k 显然存在，设直线 l：$y=k(x-1)$

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 y 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}=\frac{8}{7}$，解得 $k=\pm 1$

所以直线 l 的方程为：$x-y-1=0$，$x+y-1=0$.

（3）由 $x_1+x_2=\frac{8}{7}$，$x_1x_2=-\frac{8}{7}$，则 $|AB|=\sqrt{1+1}\sqrt{(\frac{8}{7})^2-4(-\frac{8}{7})}=\frac{24}{7}=2R$

把圆心横坐标代入直线的方程得圆心坐标为 $(\frac{4}{7}, -\frac{3}{7})$ 或 $(\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$

所以所求圆的方程为 $(x-\frac{4}{7})^2+(y+\frac{3}{7})=\frac{144}{49}$ 或 $(x-\frac{4}{7})^2+(y-\frac{3}{7})=\frac{144}{49}$.

23.【解】（1）设 $C(x, y)$，因为 $|AC|+|BC|+|AB|=2+2\sqrt{2}$，$|AB|=2$

所以 $|AC|+|BC|=2\sqrt{2}>2$，由椭圆的定义得：

动点 C 轨迹是以 $A(-1, 0)$，$B(1, 0)$ 为焦点，长轴长为 $2\sqrt{2}$ 的椭圆，

即 $a=\sqrt{2}$，$c=1$，$b^2=1$

所以动点 C 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）将直线 l：$y=kx+\sqrt{2}$ 代入椭圆的方程，整理得 $(\frac{1}{2}+k^2)x^2+2\sqrt{2}kx+1=0$

因为直线与椭圆交于不同的交点 P 和 Q

所以 $\Delta=8k^2-4(\frac{1}{2}+k^2)=4k^2-2>0$，解得 $k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（3）设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，则 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$

由（2）中知 $x_1+x_2=-\frac{4\sqrt{2}k}{1+2k^2}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2\sqrt{2}$

而 $M(\sqrt{2}, 0)$，$N(0, 1)$，所以 $\overrightarrow{MN}=(-\sqrt{2}, 1)$.

又因为 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 共线

所以 $-\sqrt{2}(y_1+y_2)=x_1+x_2$，即 $-\sqrt{2}\left[k\times\frac{4\sqrt{2}k}{1+2k^2}+2\sqrt{2}\right]=\frac{4\sqrt{2}k}{1+2k^2}$，

得 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}\notin(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})\cup(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$

所以不存在实数 k 满足 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 共线.

阶段测试卷（五）

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	B	A	B	C	D	B	D	C

二、填空题

11．2　　12．$\frac{1}{5}$　　13．（-1，2）　　14．$x^2=20y$或$y^2=20x$　　15．$\frac{\sqrt{10}}{5}$

三、解答题

16．【解】（1）因为是分层抽样，所以有 $\frac{x}{18}=\frac{2}{36}=\frac{y}{54}$，$\therefore x=1$，$y=3$．

（2）$p=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$．

17．【解】（1）由已知得，$\log_a 2=-1$，所以 $a=\frac{1}{2}$．

（2）原不等式可化为 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>-1$

所以 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}2$，从而 $0<x-1<2$，$1<x<3$

x 的取值范围为 $\{1<x<3\}$．

18．【解】（1）由题意得，对称轴为 $x=2$，顶点坐标为（2，1）

设 $y=a(x-2)^2+1$

把（-1，-8）代入，得 $a=-1$

$\therefore y=-(x-2)^2+1=-x^2+4x-3$．

（2）$-x^2+4x-3+m<0$，

$x^2-4x+3-m>0$

$\Delta=16-12+4m<0$

$\therefore m<-1$．

19．【解】（1）由题意设 $v(x)=ax+b$

再由已知得 $\begin{cases}180a+b=0\\20a+b=80\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=90\end{cases}$，

故 $0\leqslant x\leqslant 180$ 时，函数 $v(x)=-\frac{1}{2}x+90$．

（2）由题意得 $f(x)=x\cdot v(x)=-\frac{1}{2}x^2+90x$，

$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+90x=-\frac{1}{2}(x-90)^2+4050$

当 $x=90$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,180]$ 上取得最大值 4050，

即当车流密度为 90 辆/千米时，车流量可以达到最大，最大值为 4050 辆/小时．

20.【解】（1）∵ $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\sqrt{3}(1-2\sin^2\frac{x}{4})=\sin\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$.

∴ $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

当 $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})=-1$ 时，$f(x)$ 取最小值 -2；

当 $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})=1$ 时，$f(x)$ 取最大值 2.

（2）由（1）知 $f(x)=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$，又 $g(x)=f(x+\frac{\pi}{3})$.

∴ $g(x)=2\sin[\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}]=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})=2\cos\frac{x}{2}$.

∵ $g(-x)=2\cos(-\frac{x}{2})=2\cos\frac{x}{2}=g(x)$. ∴函数 $g(x)$ 是偶函数.

21.【解】设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则

$a_3=a_4-d=10-d$，$a_6=a_4+2d=10+2d$，$a_{10}=a_4+6d=10+6d$.

由 a_3，a_6，a_{10} 成等比数列得 $a_3a_{10}=a_6^2$，

即 $(10-d)(10+6d)=(10+2d)^2$，整理得 $10d^2-10d=0$，

解得 $d=0$ 或 $d=1$.

当 $d=0$ 时，$S_{20}=20a_4=200$.

当 $d=1$ 时，$a_1=a_4-3d=10-3\times1=7$，

于是 $S_{20}=20a_1+\frac{20\times19}{2}d=20\times7+190=330$.

22.【解】（1）圆心坐标为（0，3），半径为 3，

抛物线方程为 $x^2=12y$.

（2）直线方程为 $y=-\frac{1}{2}x+3$，

设 D 点坐标为（x_1，y_1），A 点坐标为（x_2，y_2），

联立方程组 $\begin{cases}x^2=12y\\ y=-\frac{1}{2}x+3\end{cases}$，化简得 $x^2+6x-36=0$

∴ $x_1+x_2=-6$，$x_1x_2=-36$

$|AD|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=15$

原点到直线 AD 的距离为 $H=\frac{|-6|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

∵ $AB+CD=AD-2r$

∴ $AB+CD=9$

∴ $S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}\cdot H\cdot(AB+CD)=\frac{27}{5}\sqrt{5}$.

23．I.【解】

（1）　　某华润苏果超市商品销售统计表

商品名	甲	乙	丙
数量（件）	200	250	300
销售价（元/件）	5	3.9	4
成本价（元/件）	3	2.5	3
利润（元）	400	350	300

（2）销售量数组 $\boldsymbol{a}$ =（200，250，300），销售价数组 $\boldsymbol{b}$ =（5，3.9，4），成本价数组 $\boldsymbol{c}$ =（3，2.5，3）

利润 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$=（200，250，300）（2，1.4，1）=1050，所以，三种商品的销售总利润为 1050 元.

II.【解】①47；②A→B→D→F→G→H；③水电重新布线和木工制作橱柜.

III.（1）A　　（2）B

IV.（1）B

（2）① $\overline{\overline{A}B}+B=A+\overline{B}+B=A+1=1$；

② $\overline{0}\cdot 1\cdot\overline{1+0}=1\cdot 1\cdot\overline{1}=1\cdot 0=0$.

综合测试卷参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	B	C	B	B	D	A	A	C

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．i　　12．17　　13．$\frac{56}{65}$　　14．$a\in(1,+\infty)$，$m\in[0,+\infty]$　　15．$-\frac{1}{4}$

三、解答题（本大题共 8 小题，共 90 分）

16．【解】由题意可得 $\begin{cases}x-3\geqslant 0\\ \sqrt{x-3}-2>0\\ \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x-3}-2)\geqslant 0\end{cases}$

解得 $7<x\leqslant 12$

故函数的定义域是 $(7,12]$．

17．【解】（1）令 $AB=c$，$AC=b=3$，$BC=a=\sqrt{5}$

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 即 $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$

又∵ $\sin C=2\sin A$

∴ $c=2\sqrt{5}$ 即 $AB=2\sqrt{5}$．

（2）在 $\triangle ABC$ 中，$c>b>a$，所以 A、B 都是锐角

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos 2A=1-2\sin^2 A=\frac{3}{5}$

$\sin(2A-\frac{\pi}{4})=\sin 2A\cos\frac{\pi}{4}-\cos 2A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{10}$．

18．【解】（1）设三个成等差数列的正数为 $a-d$，a，$a+d$，

由题意得 $a-d+a+a+d=15$ 即 $a=5$

故三个数为 $5-d$，5，$5+d$，∴ $b_3=5-d+2$，$b_4=5+5$，$b_5=5+d+13$ 得

∴ $(5+5)^2=(5-d+2)(5+d+13)$，解得 $d=-13$（舍去），$d=2$

∴ $b_3=5$，$q=\frac{b_4}{b_3}=2$，∴ $b_n=b_3q^{n-3}=5\cdot 2^{n-3}$．

【证明】（2）由（1）知 $b_1=\frac{5}{4}$，$q=2$，∴ $S_n=\frac{\frac{5}{4}\times(1-2^n)}{1-2}=\frac{5}{4}(2^n-1)$．

设 $c_n=S_n+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}\times 2^n$，易得 $\frac{c_{n+1}}{c_n}=2$

故数列 $\{S_n+\frac{5}{4}\}$ 是以 $\frac{5}{2}$ 为首项，2 为公比的等比数列.

19.【解】（1）由题意可设 $f(x)=a(x+\frac{3}{2})^2+49$，设方程 $a(x+\frac{3}{2})^2+49=0$ 的两根为 x_1，x_2（$x_1<x_2$），化简方程得 $ax^2+3ax+\frac{9a}{4}+49=0$，$x_1+x_2=3$，$x_1x_2=\frac{9}{4}+\frac{49}{a}$

$x_2-x_1=7$，$(x_2-x_1)^2=49$ 即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=49$ 代入得 $a=-4$

所以 $f(x)=-4(x+\frac{3}{2})^2+49$.

（2）由（1）可得 $f(x)$ 的最大值 $=\begin{cases}-4t^2-20t+24 & t<-\frac{5}{2}\\ 49 & -\frac{5}{2}\leqslant t\leqslant -\frac{3}{2}\\ -4t^2-12t+40 & t>-\frac{3}{2}\end{cases}$.

20.【解】（1）记甲、乙两人同时参加 A 岗位服务为事件 M，

∵试验包含的所有事件是 5 个人分到 4 个岗位，每个岗位至少有一名志愿者共有 $C_5^2A_4^4$ 种结果，满足条件的事件数 A_3^3，

∴ $P(M)=\frac{A_3^3}{C_5^2A_4^4}=\frac{1}{40}$.

（2）设甲、乙两人同时参加同一岗位服务为事件 N，

∵试验包含的所有事件是 5 个人分到 4 个岗位，每个岗位至少有一名志愿者共有 $C_5^2A_4^4$ 种结果，故不满足条件的事件有 A_4^4 种，

∴ $P(N)=\frac{A_4^4}{C_5^2A_4^4}=\frac{1}{10}$，

所以由对立事件的概率得到，甲、乙两人不在同一岗位服务的概率是 $P=1-P(N)=\frac{9}{10}$.

21.【解】设他每天应服用两种胶囊分别为 x 粒、y 粒才能满足维生素的需要量，并能得到最大量的维生素 Z．则 $\max Z=5x+2y$．由题意得

$\begin{cases}x+3y\leqslant 19\\ x+2y\leqslant 13\\ 4x+y\leqslant 24\\ 4x+3y\geqslant 12\\ x,\ y\in \mathbf{N}\end{cases}$，作图（略），由图可得 $\begin{cases}x=5\\ y=4\end{cases}$ 时，能得到最大量的维生素 Z.

22.【解】（1）设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，由题意得

$\begin{cases}c=1\\ a^2=b^2+c^2\\ \frac{a^2}{c}=2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1\end{cases}$

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1.$

（2）由题意可设直线方程为 $y=k(x+1)$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，线段 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$

联立方程组 $\begin{cases} y=k(x+1) \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 y 整理得 $(2k^2+1)x^2+4k^2x^2+2k^2-2=0$

$x_1+x_2=-\frac{4k^2}{2k^2+1}$，$y_1+y_2=k(x_1+1)+k(x_2+1)=\frac{2k}{2k^2+1}$

则 $\begin{cases} x_0=-\frac{2k^2}{2k^2+1} \\ y_0=\frac{k}{2k^2+1} \end{cases}$，又由点 $M(x_0, y_0)$ 在直线 $x-y=0$ 上，得 $-\frac{2k^2}{2k^2+1}-\frac{k}{2k^2+1}=0$

解得 $k=0$ 或 $k=-\frac{1}{2}$，所以直线方程为 $y=0$ 或 $x+2y+1=0$.

（3）设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，由题意可得 $\begin{cases} a^2+b^2=r^2 \\ (-1-a)^2+b^2=r^2 \\ |a+2|=r \end{cases}$

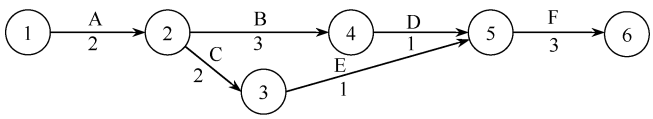
解得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ r^2=\frac{9}{4} \\ b=\pm\sqrt{2} \end{cases}$，所以圆的方程是 $(x+\frac{1}{2})^2+(y\pm\sqrt{2})^2=\frac{9}{4}$.

23. Ⅰ.（1） C；　　（2） D

Ⅱ. $x<2$；$y=\log_2 x$

Ⅲ.（1）120；　　（2）3420

Ⅳ.（1）



（2）路径一：A→B→D→F，工期为 9 天；路径二：A→C→E→F，工期为 8 天；所以路径一是关键路径，工期为 9 天.

专题参考答案

专题一　集合

第 1 讲　集合的概念与集合间的关系

【夯实基础】

1．-2，0，2　　2．$M=\{y\mid y\geqslant 1\}$　　3．A　　4．$\{1,3\}$

5．$\notin$　　6．B　　7．7　　8．$-\frac{1}{2}$或0或$\frac{1}{3}$

【实战演练】

一、达标检测

1．A　　2．D　　3．C　　4．1　　5．-1　　6．$A=B$

7．【解】（1）$\begin{cases}x-3<0\\x+1>0\end{cases}$即$\begin{cases}x<3\\x>-1\end{cases}$，得$-1<x<3$

所以$P=(-1,3)$；

（2）由题意知$a>0$，$\therefore P=(-1,a)$，$|x-1|\leqslant 1$即$Q=[0,2]$，又$\because Q\subseteq P$

故$a>2$，所以正数a的取值范围是$a\in(2,+\infty)$.

8．【解】（1）若$a^2+2a-3=5$，则$a^2+2a-8=0$，$\therefore a=2$或$a=-4$；

但此时都有$|a+1|=3$，与集合中元素的互异性相矛盾，$\therefore a\neq 2$且$a\neq -4$

若$|a+1|=5$，则$a=-6$或$a=4$，此时都有$a^2+2a-3=21$，符合题意，

$\therefore$所求a的值为$a=-6$或$a=4$.

（2）若存在这样的实数a，则$a^2+2a-3=12$且$|a+1|<12$；

或$|a+1|=12$且$a^2+2a-3<12$

由于$|a+1|=12$时，$a^2+2a-3=(a+1)^2-4=140$，所以后一种情况不存在；

由第一种情况解得$a=-5$或$a=3$

即存在这样的a值，且$a=-5$或$a=3$.

二、直击高考

1．C　　2．B　　3．D

第 2 讲　集合的运算及充要条件

【夯实基础】

1．$\{0,1,2,3,4,5\}$　　2．4　　3．-3

4．$\{3,5\}$　　5．$\{0,1,2\}$　　6．$\{a\mid a\leqslant -2\}$

7．充分不必要　　8．（1）充要；（2）必要不充分；（3）充分不必要

【实战演练】

一、达标检测

1．C　2．D　3．B　4．A　5．$\{x|x\neq 0\}$　6．$\{x|1\leqslant x<2\}$

7．【解】由题意得：$A=\{x|x\leqslant 0或x\geqslant 2\}$，$B=\{x|x>2m-1\}$，又∵$A\cup B=A$

∴$B\subseteq A$，由上得：$2m-1\geqslant 2$即$m\geqslant\frac{3}{2}$

所以实数m的取值范围是$\{m|m\geqslant\frac{3}{2}\}$.

8．【解】由已知得：$x^3+3x^3+2x=0$，解得：$x=-2$或$x=-1$或$x=0$

当$x=-2$时，$U=\{1,3,0\}$，$A=\{1,5\}$，不符合题意，舍去；

当$x=-1$时，$U=\{1,3,0\}$，$A=\{1,3\}$，$\complement_U A=\{0\}$，故$x=-1$；

当$x=0$时，$U=\{1,3,0\}$，$A=\{1,1\}$，不符合题意，舍去；

综上得：$x=-1$.

二、直击高考

1．C　2．C　3．A

专题二　不等式

第1讲　不等式的基本性质

【夯实基础】

1．(256，260)　2．$a<b<c$　3．②　4．$-\pi<\alpha-\beta<0$　5．$a<b\leqslant c$

【实战演练】

一、达标检测

1．B　2．D　3．B　4．B　5．C　6．(30，70)　7．① ② ④

8．【解】$(1+\log_x 3)-2\log_x\sqrt{3}=\log_x\frac{3x}{3}=\log_x x=1>0$，

∴$1+\log_x 3>2\log_x\sqrt{3}$.

二、直击高考

1．A　2．C　3．D

第2讲　解不等式

【夯实基础】

1．$(-\infty,2)$　2．$[-\frac{9}{2},1]$　3．-14　4．$[\frac{1}{2},+\infty)$　5．-5

6．(1)$(-\infty,-7)\cup(-\frac{1}{3},5]\cup(5,+\infty)$；(2)$(-1,1)$；(3)$(-\infty,-7]\cup[-3,+\infty)$

【实战演练】

一、达标检测

1．D　2．A　3．D　4．B　5．$(-\infty,-2)\cup(-2,-\frac{3}{2}]$　6．$[0,4]$

7．【解】由题意得：$\begin{cases}\Delta=a^2-4(a^2-1)>0\\ x_1x_2=a^2-1<0\end{cases}\Rightarrow -1<a<1$，

所以 a 的取值范围为 $(-1,1)$．

8．【解】由不等式 $ax^2+2x+c>0$ 的解集为 $(-\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ 知 $a<0$，

$-\frac{1}{3},\frac{1}{2}$ 为方程 $ax^2+2x+c=0$ 的两根，得 $-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{a}$，$-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{c}{a}$，

解得 $a=-12$，$c=2$，所以 $-cx^2+2x-a>0$

即为 $-2x^2+2x+12>0$，化简得 $x^2-x-6<0$，其解集为 $(-2,3)$．

二、直击高考

1．【解】$|2x-3|<1\Rightarrow -1<2x-3<1\Rightarrow 1<x<2$，

所以原不等式的解集为 $(1,2)$．

2．【解】由题意得：$0<8-2x-x^2\leqslant 8\Rightarrow\begin{cases}x^2+2x-8<0\\ x^2+2x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow -4<x\leqslant -2\text{或}0\leqslant x<2$

所以原不等式的解集为 $(-4,-2]\cup[0,2)$．

3．C

第 3 讲　线性规划初步

【夯实基础】

1．（1）【解】因为点 $(0,0)$ 在直线 $3x-2y+a=0$ 的上方区域，

所以 $3\times0-2\times0+a<0\Rightarrow a<0$，$3\times1-2\times3+a=a-3<0$，

所以点 $(1,3)$ 在此直线的上方区域．

（3）$(-\infty,\frac{2}{3})$

2．5　3．$\max z'=-2x_1-3x_2+0x_3+0x_4$，$\begin{cases}3x_1+5x_2-x_3=45\\ 5x_1+6x_2+x_4=50\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0\end{cases}$

4．1　5．3　6．x_1，x_4

【实战演练】

一、达标检测

1．A【解析】双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两条渐近线方程为 $y=\pm x$，两者与直线 $x=3$ 围成一个三角形区域时有 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y\geqslant 0\\ 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，故选 A

2．D【解析】画出可行域图，目标函数在点（－2，2）处取得最小值－8．

3．D【解析】$x^2+y^2+2x=(x+1)^2+y^2-1$表示可行域上的点（x，y）与点（－1，0）的距离的平方值减1．

4．B【解析】设甲车间加工原料x箱，乙车间加工原料y箱，甲乙两车间每天获利为z元，

由题意得$\begin{cases}10x+6y\leqslant 480\\ x+y\leqslant 70\\ x，\ y\in\mathbf{N}^*\end{cases}$，$z=7\times 40x+4\times 50y=280x+200y$，

画出可行域（略），联立方程组$\begin{cases}10x+6y-480=0\\ x+y=70\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=15\\ y=55\end{cases}$

知z在点（15，55）处取得最大值．

5．C

6．$\frac{121}{4}$【解析】不等式$x-y+5\geqslant 0$表示直线$x-y+5=0$上及右下方的平面区域，$x+y\geqslant 0$表示直线$x+y=0$上及右上方的平面区域，$x\leqslant 3$表示直线$x=3$上及左边的平面区域，所以不等式组表示的平面区域（略），其中$A(-\frac{5}{2},\frac{5}{2})$，$B(3,-3)$，$C(3，8)$，故所求面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 11\times\frac{11}{2}=\frac{121}{4}$．

7．【解】在平面直角坐标系内作出可行域（略），作直线l_0：$x+2y=0$，把直线向右上方平移至l_1的位置，即直线经过可行域上的点A时，目标函数$z=x+2y$取得最大值，

由方程组$\begin{cases}4x-5y+21=0\\ 2x+y-7=0\end{cases}$，解得$A(1，5)$，所以$z_{\max}=1+2\times 5=11$．

把直线向左下方平移至l_2的位置，即直线经过可行域上的点B时，目标函数$z=x+2y$取得最小值，由方程组$\begin{cases}4x-5y+21=0\\ x-3y+7=0\end{cases}$，解得$B(-4，1)$，所以$z_{\min}=-4+2\times 1=-2$．

8．【解】因为M，N关于直线$x+y=0$对称，所以过M，N的直线$y=kx+1$的斜率为$k=1$，

而圆$x^2+y^2+kx+my-4=0$的圆心$(-\frac{1}{2},-\frac{m}{2})$在直线$x+y=0$上，所以$m=-1$，

则不等式$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x+y\leqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$，表示的平面区域就是一个斜边为1的等腰直角三角形，面积为$\frac{1}{4}$．

二、直击高考

【解】设生产甲产品x吨，生产乙产品y吨，可获利z万元，由题意得$z=5x+3y$，则

$\begin{cases}3x+y\leqslant 13\\ 2x+3y\leqslant 18\\ x，\ y\geqslant 0\end{cases}$，画出可行域（略），联立方程组$\begin{cases}3x+y=13\\ 2x+3y=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}$，

所以$\max z=5\times 3+3\times 4=27$．

即生产甲产品3吨，生产乙产品4吨，可获利最大为27万元．

专题三　数列

第 1 讲　数列与等差数列

【夯实基础】

1．（1）7；　（2）$a_n=(-1)^n\frac{1}{2^n}$；　（3）$a_1=-2$或$a_1=1$

2．（1）15；

（2）是．证明：因为$\{a_n\}$是等差数列，设公差为d，所以

$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}+2a_{n+2}-(a_n+2a_{n+1})=3d$．所以数列$\{b_n\}$成等差数列．

（3）7；　（4）54；　（5）$\frac{26}{3}$；　（6）①7；②210；③24

【实战演练】

一、达标检测

1．B　　2．D　　3．C　　4．$2n-11$，3　　5．-15　　6．4

7．【解】（1）因为$\begin{cases}a_2+a_5=22\\a_3a_4=117\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a_1+5d=22\\(a_1+2d)(a_1+3d)=117\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\d=4\end{cases}\Rightarrow a_n=4n-3$．

（2）因为$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=2n^2-n\Rightarrow b_n=\frac{n(2n-1)}{n+c}$

因为数列$\{b_n\}$是等差数列，所以$b_n=An+B$，得$c=0$或$c=-\frac{1}{2}$．

8．【解】（1）由$S_{n+1}-S_n=(\frac{1}{3})^{n+1}\Rightarrow a_{n+1}=(\frac{1}{3})^{n+1}$，又$a_1=\frac{1}{3}\Rightarrow a_n=(\frac{1}{3})^n$

$S_n=\frac{\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]$．

（2）由（1）得$S_1=\frac{1}{3}$，$S_2=\frac{4}{9}$，$S_3=\frac{13}{27}$，又$2t(S_1+S_2)=S_1+3(S_2+S_3)$

得$2t(\frac{1}{3}+\frac{4}{9})=\frac{1}{3}+3(\frac{4}{9}+\frac{13}{27})\Rightarrow t=2$．

二、直击高考

1．B

2．【解】（1）由题意得：$\frac{S_n}{n}=3n+2$，所以$S_n=3n^2+2n$，

所以$a_1=S_1=3+2=5$，

$a_2=S_2-S_1=3\times2^2+2\times2-5=11$.

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2+2n)-[3(n-1)^2+2(n-1)]=6n-1$，

当$n=1$时，$a_1=5=6\times1-1$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=6n-1$．

（2）因为$f(n)\geqslant S_n-22$，所以$3n+2\geqslant3n^2+2n-22$，

所以 $3n^2-n-24\leqslant 0$，所以 $-\frac{8}{3}\leqslant n\leqslant 3$，

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=1,2,3$.

第 2 讲　等比数列

【夯实基础】

1．27　　2．2^{n-1}　　3．7　　4．3　　5．$-4,-\frac{9}{7},\frac{-6\pm\sqrt{6}}{5}$

6．（1）$\frac{(\sqrt{2})^n}{2}$；　（2）63

【实战演练】

一、达标检测

1．D　　2．B　　3．-4　　4．11　　5．3　　6．$a_n=2\times 3^{n-3}$ 或 $a_n=2\times 3^{3-n}$

7．【解】（1）设 $\frac{a_{n+1}+m}{a_n+m}=q$，∴ $a_{n+1}+m=(a_n+m)q$，∴ $a_{n+1}=qa_n+m(q-1)$，

∴ $q=2$，$m=1$.

（2）由（1）得 $a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，∴ $\log_{\frac{1}{2}}(a_n+m)=\log_{\frac{1}{2}}(a_n+1)=\log_{\frac{1}{2}}2^n=-n$，

∴ $S_n=-1-2-3-\cdots-n=-\frac{n^2+n}{2}$.

8．【解】（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则由题设

得 $\begin{cases}a_1+d=1\\11a_1+55d=33\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=\frac{1}{2}\\d=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n$.

（2）∵ $a_n=\frac{1}{2}n$，∴ $b_n=(\frac{1}{2})^{a_n}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}n}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^n\Rightarrow\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，公比也为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的等比数列.

二、直击高考

1．A

2．【解】（1）由题意得 $a_1=S_1=2A+B=3$，$a_2=S_2-S_1=2A$，$a_3=S_3-S_2=4A$

∵ $\{a_n\}$ 是等比数列，∴ $q=\frac{a_3}{a_2}=2$.

（2）由（1）得 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{2A}{3}=2\Rightarrow A=3$，∵ $2A+B=3\Rightarrow B=-3$

∴ $A=3$，$B=-3$，$a_n=3\cdot 2^{n+1}$.

（3）由（2）得 $S_n=3\cdot 2^n-3$

$T_n=(3\cdot 2-3)+(3\cdot 2^2-3)+\cdots+(3\cdot 2^n-3)=3(2+2^2+\cdots+2^n)-3n$

$=3\cdot 2^{n+1}-3n-6$.

第 3 讲　数列的综合应用

【夯实基础】

1．A　　2．D　　3．10　　4．$a_n=2^n-1$　　5．C

【实战演练】

一、达标检测

1．D　　2．B　　3．B　　4．1700m　　5．4　　6．$\pm(\frac{1}{4})^{n-1}$　　7．$4^{\frac{1}{5}}-1$

8．【解】（1）设 n 年可将荒山全部绿化

则 $100n+\frac{n(n-1)}{2}\times 50=3250\Rightarrow n^2+3n-130=0\Rightarrow n=10$，$n=-13$（舍去），

即 10 年可将荒山全部绿化．

（2）由题意得：

$S=100\times 2\times 1.1^{10}+150\times 2\times 1.1^9+200\times 2\times 1.1^8+\cdots+550\times 2\times 1.1$

即 $S=100(2\times 1.1^{10}+3\times 1.1^9+4\times 1.1^8+\cdots+11\times 1.1)$　　①

$\therefore 1.1S=100(2\times 1.1^{11}+3\times 1.1^{10}+4\times 1.1^9+\cdots+11\times 1.1^2)$　　②

②−①得 $0.1S=100(2\times 1.1^{11}+1.1^{10}+1.1^9+\cdots+1.1^2-11\times 1.1)$

$=100[1.1^{11}+\frac{1.1^2(1-1.1^{10})}{1-1.1}-11\times 1.1]=100(1.1^{11}+\frac{1.1^{12}-1.1^2}{0.1}-11\times 1.1)$

$=100\times 1.1^{11}+1000\times 1.1^{12}-1000\times 1.1^2-1000\times 1.1^2$

$=1000\times 1.1^{12}+100\times 1.1^{11}-2000\times 1.1^2$

$=100\times 1.1^{11}(11+1)-2420$

$\therefore S=12000\times 1.1^{11}-24200$．

二、直击高考

1．B

2．【证明】（1）由题意得：

$a_1=2$，$a_2=a_1+2=4$，$a_3=a_2+2\times 2=8\Rightarrow a_2^2=a_1a_3$

即 a_2 是 a_1，a_3 的等比中项．

【解】（2）因为 $a_{n+1}=a_n+2n$，$n\in\mathbf{N}^*$

所以 $a_{n+1}-a_n=2n$，$n\in\mathbf{N}^*$

从而，当 $n\geqslant 2$ 时，有

$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=2\times 2$，$a_4-a_3=2\times 3,\cdots$，$a_n-a_{n-1}=2(n-1)$，

所以 $a_n-a_1=2[1+2+3+\cdots+(n-1)]$，

从而 $a_n=2+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-n+2$，

当 $n=1$ 时，$a_1=2=1^2-1+2$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2-n+2$．

专题四　函数

第 1 讲　函数的基本概念

【夯实基础】

1．B　　2．D　　3．$[-4,-1)$，$[0,1]$　　4．$f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geqslant -\frac{1}{2}\\ -2x-1 & x<-\frac{1}{2}\end{cases}$

5．$S=\pi r^2$（$r>0$）　　6．（1）$f(x)=x+1$；（2）$f(x)=x-2$；（3）$y=3x$（$x\in\mathbf{N}$）.

【实战演练】

一、达标检测

1．B　　2．C　　3．D　　4．C　　5．-1　　6．x^2-4x+5

7．【解】由$\begin{cases}0\leqslant x^2\leqslant 1\\ 0\leqslant x+\frac{4}{3}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant -\frac{1}{3}$，所以定义域为$[-1,-\frac{1}{3}]$.

8．【解】根据题意可知，对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $kx^2+kx+2\neq 0$.

当 $k=0$ 时，分母为 $2\neq 0$，函数为 $y=\frac{\sqrt[3]{x-5}}{2}$，定义域为 $\mathbf{R}$；

当 $k\neq 0$ 时，由 $\Delta=k^2-8k<0$，得 $0<k<8$，

这时，对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 总有 $kx^2+kx+2\neq 0$，函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

所以，k 的取值范围为 $[0,8)$.

二、直击高考

1．$(0,\frac{1}{4}]$　　2．C　　3．1

第 2 讲　函数的性质

【夯实基础】

1．D　　2．D

【实战演练】

一、达标检测

1．A　　2．A　　3．B　　4．B　　5．$(-2,1)$　　6．$(-\infty,-2]\cup[0,2)$

7．【解】由题意得 $-\frac{4m}{2\times 2}=-1$，$\therefore m=1$，$\therefore f(x)=2x^2+4x-3$，

$\therefore f(2)=2\times 2^2+4\times 2-3=13$.

8．【解】（1）因为 $f(x)$ 为减函数且 $f(1)=0$

$$\therefore \begin{cases}m^2-1<0\\ m^2-1+m^2-3m+2=0\end{cases}\text{解得}\begin{cases}-1<m<1\\ m=1\text{或}m=\frac{1}{2}\end{cases},\ \therefore m=\frac{1}{2}.$$

（2）若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\begin{cases} m^2-1\neq 0 \\ m^2-3m+2=0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m\neq \pm 1 \\ m=1\text{或}m=2 \end{cases}$ $\therefore m=2$.

二、直击高考

1．D　　2．0

3．【解】（1）由题意得 $\begin{cases} b-2=0 \\ 2a-6=0 \end{cases}$ 解得 $b=2$，$a=3$.

（2）由（1）知 $f(x)=3x^2-5$，于是有

$(\frac{1}{2})^{3x^2-5}>2^{-2x}=(\frac{1}{2})^{2x}$，$3x^2-5<2x$

解得 $-1<x<\frac{5}{3}$.

（3）由题意得 $g(x)=3x^2+mx-1$，$\frac{-12-m^2}{12}=-4$，解得 $m=\pm 6$.

第 3 讲　一次函数、反比例函数和二次函数

【夯实基础】

1．$m=\frac{3}{5}$　　2．（3，－1）　　3．（2）C；（3）① $y=-2x^2+12x-8$；

②对称轴方程是 $x=-1$，顶点坐标是（－1，－3）；③（2，0）、（－5，0）.

【实战演练】

一、达标检测

1．C　　2．B　　3．B　　4．D　　5．$y=-x+2$

6．**R**，$(-\infty, 9]$，$x=-2$，$(-2, 9)$，$x\in(-\infty, -2]$，$x\in[-2,+\infty)$

7．$h=7$　　8．$k\geqslant 5$或$k\leqslant -1$

二、直击高考

1．【解】（1）由题意可得 $C(0, m)$，$A(-\sqrt{2m}, 0)$，$B(\sqrt{2m}, 0)$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times m\times 2\sqrt{2m}=8\sqrt{2}\Rightarrow m=4$.

（2）由（1）得 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4$，

知函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值和最小值分别是

$f(x)_{\max}=f(0)=4$，$f(x)_{\min}=f(2)=2$.

2．【解】（1）由题意得：$c=0$，$-\frac{b}{2a}=1$，

$f(x)=x$ 有相等实根，

所以 $\Delta=(b-1)^2=0$，从而 $b=1$，$a=-\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$.

（2）因为 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)$ 在区间[−1，2]上的最大值为 $f(1)=\frac{1}{2}$，最小值为 $f(-1)=-\frac{3}{2}$.

3.【解】（1）由题意得 $\frac{a^2-2a-1}{2}\leqslant 1$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 3$，

所以 a 的的取值范围是[−1，3]

（2）$f(1)=1-(a^2-2a-1)-a-2=-a^2+a$，

$2f(0)=2(-a-2)=-2a-4$，

所以 $f(1)-2f(0)=-a^2+3a+4=-(a-4)(a+1)$，

因为 $-1\leqslant a\leqslant 3$，所以 $a-4<0$，$a+1\geqslant 0$，

从而 $-(a-4)(a+1)\geqslant 0$，于是 $f(1)-2f(0)\geqslant 0$，

即 $f(1)\geqslant 2f(0)$.

第 4 讲　幂、指数、对数运算

【夯实基础】

1.（2）$\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$，$b^{-\frac{5}{3}}$；（3）3　　2.（1）a；（2）a^2；（3）1；（4）16

3. $\log_2 16=4$，2，9　　4.（1）2，3；（2）$1-a$，12　　5. $\frac{2}{a}$　　6. 16

【实战演练】

一、达标检测

1. A　　2. C　　3. D　　4. A　　5.（1）10；（2）-2；（3）729；（4）$-3a$

6. $5\log_a x+\frac{1}{2}\log_b y-\frac{1}{3}\log_c z$

7.【解】（1）原式 $=\frac{1}{(\frac{8}{27})^{-\frac{1}{3}}}=(\frac{8}{27})^{\frac{1}{3}}=\frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3}$；

（2）原式 $=|x-2|+|x-3|=2-x+3-x=5-2x$.

8.【解】原式 $=\frac{\log_5(2^2\times 3)}{1+\log_5(0.36^{\frac{1}{2}}\times 64^{\frac{1}{3}})}=\frac{\log_5 12}{1+\log_5 2.4}=\frac{\log_5 12}{\log_5(5\times 2.4)}=1$.

二、直击高考

1. B　　2. A　　3. 2

第 5 讲　幂、指数、对数函数

【夯实基础】

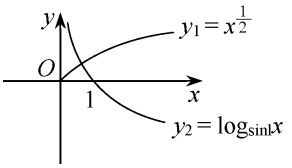
1.（1）2，−1；（2）2　　2. B　　3. B　C　　4. D

【实战演练】

一、达标检测

1．B　　2．A　　3．C　　4．D　　5．<，>　　6．$\frac{1}{3}$

7．在同一坐标系中分别作出函数 $y_1=x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y_2=\log_{\sin 1}x$ 的图像，可知只有唯一一个交点．答案：1．



8．$\{x\mid x<-\frac{3}{2}\}$

二、直击高考

1．$(-\infty,1]$　　2．A

3．【解】由题意得：

$8-2^{x^2+2x}\geqslant 0\Rightarrow 2^{x^2+2x}\leqslant 2^3\Rightarrow x^2+2x-3\leqslant 0\Rightarrow -3\leqslant x\leqslant 1$，

所以函数的定义域为 $[-3,1]$．

第 6 讲　函数的应用

【夯实基础】

1．$y=100-50t$，$t\in[0,2]$　　2．$y=30x$，$x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$　　3．95

4．$0.9^x a$　　5．10

【实战演练】

一、达标检测

1．A　　2．A　　3．B　　4．B　　5．C　　6．$y=120x-30$　　7．146.41

8．【解】设投资乙产品 a 万元，总利润为 y 万元，

则甲产品的投资额为 $(60-a)$ 万元，由题意得

$$y=P+Q=\frac{60-a}{3}+\frac{10}{3}\sqrt{a}=-\frac{1}{3}(\sqrt{a}-5)^2+\frac{85}{3}$$

当 $\sqrt{a}=5$ 即 $a=25$ 万元 的时候，$y_{\max}=\frac{85}{3}$ 万元

∴投资甲产品 $60-25=35$ 万元，投资乙产品 25 万元时可使利润最大．

二、直击高考

1．A

2．【解】（1）设 $y=ax+b$，则由题意得

$$\begin{cases}5a+b=14\\8a+b=8\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-2\\b=24\end{cases}$$

所以，$y=-2x+24$，$0\leqslant x\leqslant 12$．

（2）设每次拖挂 x 节车厢时，每天满员营运人数为 z，则

$$z=200x(-2x+24)=200(-2x^2+24x)$$

$$=200[-2(x-6)^2+72]$$

所以，当 $x=6$ 时， z 取到最大值1440，

即拖挂 6 节车厢时，才能使营运人数最多，一天内最多营运人数为 1440 人.

3.【解】（1）由题意，得： $y=P-Q+10=2x-8\sqrt{x}+10$，

令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2(t\geqslant 0)$，

所以 $y=2t^2-8t+10=2(t-2)^2+2$，

当 $t=2$ 时， $y_{\min}=2$，

此时 $x=t^2=4$，

所以经过 4 小时池中水量最小，最小量为 2 吨.

（2）令 $y=10$，由（1）得： $2t^2-8t+10=10$，

所以 $t=4$ 或 $t=0$（舍去），

所以 $x=16$，

所以经过 16 小时关闭进水管阀门.

专题五　三角函数

第 1 讲　三角函数的相关概念

【夯实基础】

1．1440　　2．D

3.【解】因为 $150°=\dfrac{5\pi}{6}$，所以 $l=\alpha r=6\times\dfrac{5\pi}{6}=5\pi$.

4.【解】由题意 $x=-5$，$y=12$， $r=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$.

于是 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{12}{13}$， $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=-\dfrac{5}{13}$， $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=-\dfrac{12}{5}$.

5．D

【实战演练】

一、达标检测

1．B　　2．C　　3．D　　4．$\dfrac{1}{2}(\pi-2)r^2$　　5．$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$　　6．$2\sin 1$

7.【解】（1）∵ $x=4$，$y=-3$，∴ $r=5$，于是 $2\sin\alpha+\cos\alpha=2\cdot\dfrac{-3}{5}+\dfrac{4}{5}=-\dfrac{2}{5}$.

（2）若角 α 终边过点 $P(4,3)$，则 $2\sin\alpha+\cos\alpha=2\cdot\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}=2$；

若角 α 终边过点 $P(-4,3)$，则 $2\sin\alpha+\cos\alpha=2\cdot\dfrac{3}{5}+\dfrac{-4}{5}=\dfrac{2}{5}$；

若角 α 终边过点 $P(-4,-3)$，则 $2\sin\alpha+\cos\alpha=2\cdot\dfrac{-3}{5}+\dfrac{4}{5}=-\dfrac{2}{5}$；

若角 α 终边过点 $P(4,-3)$，则 $2\sin\alpha+\cos\alpha=2\cdot\dfrac{-3}{5}+\dfrac{4}{5}=-\dfrac{2}{5}$.

8.【解】（1）取 $P_1(8,15)$，则 $r=17$， $\log_2\left|\dfrac{1}{\cos\alpha}-\tan\alpha\right|=\log_2\left|\dfrac{17}{8}-\dfrac{15}{8}\right|=-2$；

（2）取 $P_2(-8,-15)$，则 $r=17$，$\log_2\left|\frac{1}{\cos\alpha}-\tan\alpha\right|=\log_2\left|-\frac{17}{8}-\frac{15}{8}\right|=2$.

二、直击高考

1．A　　2．B　　3．$-\frac{29}{15}$

第 2 讲　三角变换与求值

【夯实基础】

1．–2【解析】由 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\tan\alpha=-2$.

2．$\frac{2\sqrt{6}}{5}$【解析】已知 $\Rightarrow\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha=-(-\sqrt{1-\cos^2\alpha})=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

3．（1）【解】由 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{7}$.

（2）A【解析】由 $\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{2}{3}>0$，可知 A 这锐角，所以 $\sin A+\cos A>0$，

又 $(\sin A+\cos A)^2=1+\sin 2A=\frac{5}{3}$，故选 A.

【实战演练】

一、达标检测

1．C　　2．C　　3．A　　4．$[-1,\frac{7}{3}]$　　5．$\frac{2\sqrt{5}}{25}$　　6．2

7．【解】（1）∵ $f(x)=2\sin x\cos x+\cos 2x$，∴ $f(\frac{\pi}{4})=2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{2}=1$；

（2）$f(\frac{\alpha}{2})=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，$\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\sin\alpha=\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}$，

∵ $\alpha\in(0,\pi)$，∴ $\sin\alpha>0$，故 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

8．【解】∵ $\tan\beta=-\frac{1}{7}$，∴ $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$

∵ $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，∴ $-\pi<2\alpha-\beta<0$

∴ $\tan(2\alpha-\beta)=\tan[(2\alpha-2\beta)+\beta]=\frac{\tan(2\alpha-2\beta)+\tan\beta}{1-\tan(2\alpha-2\beta)\tan\beta}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{1}{7}}=1$

∴ $2\alpha-\beta=-\frac{3\pi}{4}$.

二、直击高考

1．$\frac{1}{2}$

2．【解】因为点$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$在曲线$6x^2+y^2=5$上

所以$6\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=5$，$\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{3}{5}$

又α为锐角，所以$\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$，$\tan 2\alpha=\frac{4}{3}$

$$\tan(2\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\frac{4}{3}-1}{1+\frac{4}{3}}=\frac{1}{7}.$$

3．【解】由题意知 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3=\tan\alpha$，于是

（1） $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=-2$.

（2） $4\sin^2\alpha-\sin 2\alpha=\frac{4\sin^2\alpha-\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{4\tan^2\alpha+2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{21}{5}$.

第3讲　三角函数的图像和性质

【夯实基础】

1．（1） $a=\frac{1}{2}$，$b=1$或$b=-1$；　（2） -5

2．（1）8，$-\frac{\pi}{8}$，8π，$\frac{1}{4}$；（2）C；（3）B；

（4）【解】函数递减区间为：

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

即$[\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ \frac{11\pi}{12}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$.

当$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$时，$y$取最大值5.

【实战演练】

一、达标检测

1．C　　2．B　　3．C　　4．$\frac{\pi}{2}$　　5．$\frac{7}{12}\pi$　　6．$[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$

7．【解】（1）∵ $f(x)=\cos(\frac{\pi}{3}+x)\cos(\frac{\pi}{3}-x)-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}$

$$=(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\cos^2 x-\frac{3}{4}\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1+\cos 2x}{8}-\frac{3-3\cos 2x}{8}-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2x-\sin 2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})$$

函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\pi$，

函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）由 $2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\pi\Rightarrow k\pi-\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{3\pi}{8},\ k\in\mathbf{Z}$

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间 $[k\pi-\frac{\pi}{8},\ k\pi+\frac{3\pi}{8}],\ k\in\mathbf{Z}$

又∵ $x\in[0,\ \pi]$，则 $f(x)$ 在 $[0,\ \pi]$ 上的单调递减区间为 $[0,\frac{3\pi}{8}]$，$[\frac{7\pi}{8},\ \pi]$.

8. 【解】（1）由题意 $A=3,\ \frac{T}{2}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3},\ T=\frac{2\pi}{3},\ \omega=3$

设解析式为 $y=3\sin(3x+\varphi)$

∵函数图像经过点 $(\frac{\pi}{4},\ 3),\ |\varphi|<\frac{\pi}{2}$

∴ $3\sin(3\times\frac{\pi}{4}+\varphi)=3,\ \varphi=-\frac{\pi}{4}$，函数的解析式为 $y=3\sin(3x-\frac{\pi}{4})$.

（2）函数的振幅为 3，角速度为 3，初相位为 $-\frac{\pi}{4}$，周期为 $T=\frac{2\pi}{3}$.

（3）函数的最大值为 4，此时 $3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$x=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

（4）因为 $3x-\frac{\pi}{4}=k\pi$，$x=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{3}k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

函数的对称中心 $(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{3}k\pi,\ 0),\ k\in\mathbf{Z}$

函数的对称轴为：$3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

二、直击高考

1．B　　2．A

3．【解】（1）由题意得

$$f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin(x+\frac{\pi}{6}),$$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\pi$.

（2）由 $f(\alpha)=\frac{1}{2}$ 得 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$，

因为 $\alpha\in(-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3})$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{6}\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，

$$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}=\frac{\sqrt{15}}{4},$$

从而 $\sin\alpha=\sin[(\alpha+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{6}]=\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}-\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{8}$.

第 4 讲　解三角形

【夯实基础】

1．B　　2．C　　3．$\frac{15\sqrt{3}}{4}$

【实战演练】

一、达标检测

1．D　　2．C　　3．B　　4．C　　4．$\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{2}$　　5．$-\frac{3}{2}$　　6．$\sqrt{2}$

7．【解】（1）∵ A，B，C 为△ ABC 的内角，且 $B=\frac{\pi}{3}$，$\cos A=\frac{4}{5}$，

∴ $C=\frac{2\pi}{3}-A$，$\sin A=\frac{3}{5}$，

∴ $\sin C=\sin(\frac{2\pi}{3}-A)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$.

（2）由（1）知 $\sin A=\frac{3}{5}$，$\sin C=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$，

又∵ $B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{3}$，∴在△ ABC 中，由正弦定理，得

∴ $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{6}{5}$.

∴△ ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\times\sqrt{3}\times\frac{3+4\sqrt{3}}{10}=\frac{36+9\sqrt{3}}{50}$.

8．【证明】（1）∵ $\vec{m}\cdot\vec{n}$，∴ $a\sin A=b\sin B$，

即 $a\cdot\frac{a}{2R}=b\cdot\frac{b}{2R}$，其中 R 是三角形△ ABC 外接圆半径，$a=b$

∴△ ABC 为等腰三角形.

【解】（2）由题意可知 $\vec{m}\cdot\vec{p}=0$，即 $a(b-2)+b(2-2)=0$

∴ $a+b=ab$

由余弦定理可知，$4=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab$

即 $(ab)^2-3ab-4=0$

∴ $ab=4$（舍去 $ab=-1$）

∴ $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

二、直击高考

1．D

2.【解】（1）由题意得：$S=\frac{1}{2}ab\sin C$，

$\frac{1}{2}\times 4\times 5\sin C=5\sqrt{3}$，所以 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\angle C=60^\circ$ 或 120°.

（2）当 $\angle C=60^\circ$ 时，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=16+25-2\times 4\times 5\times\frac{1}{2}=21$

$c=\sqrt{21}$；

当 $\angle C=120^\circ$ 时，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=16+25-2\times 4\times 5\times(-\frac{1}{2})=61$

$c=\sqrt{61}$.

3.【解】（1）由题意得

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan A\cdot\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=\sqrt{3}$$

又 $0<A+B<\pi$，所以 $A+B=\frac{\pi}{3}$，$C=\frac{2\pi}{3}$

（2）因为 $(\sqrt{19})^2=2^2+b^2-2\times 2\times b\times\cos\frac{2\pi}{3}$，$b^2+2b-15=0$

解得 $b=3$，$b=-5$（舍去）

$S=\frac{1}{2}\times 2\times 3\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

专题六　概率统计

第 1 讲　排列与组合

【夯实基础】

1．19；12

2.【解】要组成一个三位数可以分成三个步骤完成：第一步确定百位上的数字，第二步确定十位上的数字，第三步确定个位上的数字。根据乘法原理，可以组成的三位数的个数是：

（1）$N=5\times 5\times 5=125$

（2）$N=A_5^3=5\times 4\times 3=60$

（3）$N=A_5^1A_5^2=5\times 5\times 4=100$

3．C_{42}^5；A_{42}^2

4.【解】$T_{r+1}=C_5^r(x^3)^{5-r}(-\frac{2}{x^2})^r=(-2)^rC_5^rx^{15-5r}$

依题意 $15-5r=5$，解得 $r=2$

故 $(-2)^2C_5^r=40$ 为所求 x^5 的系数.

【实战演练】

一、达标检测

1．B　　2．B　　3．A　　4．A　　5．B　　6．D

7．$C_{10}^2=45$；$A_{10}^2=90$　　8．4 或 5　　9．215　　10．-64

11.【解】分为三类：1 奇 4 偶有 $C_6^1C_5^4$ ；3 奇 2 偶有 $C_6^3C_5^2$；5 奇 0 偶有 C_6^5

所以一共有 $C_6^1C_5^4+C_6^3C_5^2+C_6^5=236$.

12.【解】（1）$5^6=15625$；（2）$A_6^5=720$；（3）$C_6^5=6$； （4）一共有 $A_5^5A_3^3=720$ 种；

（5）先将其余四个同学排好有 A_4^4 种方法，此时他们留下五个“空”，再将甲、乙和丙三个同学分别插入这五个“空”有 A_5^3 种方法，所以一共有 $A_4^4A_5^3=1440$ 种.

二、直击高考

1．96　　2．−672　　3．C

第 2 讲　概率

【实战演练】

一、达标检测

1．C　　2．B　　3．D　　4．B　　5．B　　6．A

7．$\frac{5}{6}$　　8．$\frac{2}{9}$　　9．$\frac{1}{12}$　　10．$\frac{2}{3}$

11.【解】（1）设摸出的 4 个球中有 2 个白球、3 个白球分别为事件 A，B，

则 $P(A)=\frac{C_5^2C_3^2}{C_8^4}=\frac{3}{7}$，$P(B)=\frac{C_5^2C_3^1}{C_8^4}=\frac{3}{7}$

∵ A，B 为两个互斥事件 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{6}{7}$

即摸出的 4 个球中有 2 个或 3 个白球的概率为 $\frac{6}{7}$.

（2）设摸出的 4 个球中全是白球为事件 C，则

$P(C)=\frac{C_5^4}{C_8^4}=\frac{1}{14}$

至少摸出一个黑球为事件 C 的对立事件，其概率为 $1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$.

12.【解】函数 $f(x)=ax^2-4bx+1$ 的图像的对称轴为 $x=\frac{2b}{a}$，

要使 $f(x)=ax^2-4bx+1$ 在区间[1，+∞）上为增函数，

当且仅当 $a>0$ 且 $\frac{2b}{a}\leqslant 1$，即 $2b\leqslant a$

若 $a=1$ 则 $b=-1$，若 $a=2$ 则 $b=-1$，1，若 $a=3$ 则 $b=-1$，1，

∴事件包含基本事件的个数是 $1+2+2=5$，

∴所求事件的概率为 $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

二、直击高考

1．A【解析】a 的取值有 6 种情况，方程 $x^2+ax+1=0$ 有两个不相等实根，则需 $\Delta=a^2-4>0$，$a>2$ 或 $a<-2$，共有 4 种情况，$P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，选 A.

2．$\frac{1}{4}$【解析】$P=\frac{A_3^2}{A_4^3}=\frac{1}{4}$.

3.【解】（1）$P_1=\dfrac{A_2^1A_3^1}{A_5^1A_4^1}=\dfrac{3}{10}$；　（2）$P_2=\dfrac{A_3^1A_2^1}{A_5^1A_4^1}=\dfrac{3}{10}$；

（3）设 A：甲取到红球，B：乙取到红球

$P(A)=\dfrac{A_3^1}{A_5^1}=\dfrac{3}{5}$，　$P(B)=P_1+P_2=\dfrac{3}{5}$，　$P(A)=P(B)$

即甲、乙取到红球的概率相等.

第 3 讲　统计

【实战演练】

一、达标检测

1．B　　2．D　　3．D　　4．C　　5．B　　6．C

7．0.9　　8．78　　9．2　　10．30

11.【解】（1）由题意可知，$\dfrac{x}{1000}=0.15\Rightarrow x=150$（人）.

（2）由题意可知，肥胖学生人数为 $y+z=400$（人）.

设应在肥胖学生中抽取 m 人，则 $\dfrac{m}{400}=\dfrac{50}{1000}\Rightarrow m=20$（人），

所以应在肥胖学生中抽 20 名.

（3）由题意可知，$y+z=400$，且 $y\geqslant 193$，$z\geqslant 193$，满足条件的(y,z)有（193，207），（194，206），…，（207，193），共有 15 组.

设事件 A 为“肥胖学生中男生不少于女生”，即 $y\leqslant z$，满足条件的(y,z)有（193，207），（194，206），…，（200，200），共有 8 组，

所以 $P(A)=\dfrac{8}{15}$.

即肥胖学生中女生少于男生的概率为 $\dfrac{8}{15}$.

12.【解题分析】要从平均值和方差（或标准差）两个方面考虑，在平均值相等的情况下，再从方差（或标准差）方面考虑，方差（或标准差）越小，表明各个个体就越接近平均值，产品就越稳定.

【解】$\bar{x}_{甲}=\dfrac{1}{10}(12+13+\ \ldots+11)=13$

$\bar{x}_{乙}=\dfrac{1}{10}(11+16+\ldots+16)=13$

$s_{甲}^{\,2}=\dfrac{1}{10}[(12-13)^2+(13-13)^2+\ldots+(13-11)^2]=1.6$

$s_{乙}^{\,2}=\dfrac{1}{10}[(11-13)^2+(16-13)^2+\ldots+(16-13)^2]=3.4$

由于 $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，$s_{甲}^{\,2}<s_{乙}^{\,2}$，所以甲种小麦长得比较整齐.

二、直击高考

1．C　　2．B

专题七　平面向量及复数

第 1 讲　向量的概念与线性运算

【夯实基础】

1.（1）错　两向量模可比较大小，但两向量不能比较大小；

（2）错　模相等的两向量，方向不一定相同或相反；

（3）对　只有大小相等，方向相同的两向量才相等.

2．×　　3．$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OA}$　　4．② ③　　5．$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

6.【解】① 原式$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

② 原式$=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$

7．2

8.【解】$2\vec{x}-(5\vec{a}+3\vec{x}-4\vec{b})+\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}=\vec{0}$，化简整理得：$-\vec{x}-\frac{9}{2}\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$，

得：$\vec{x}=\frac{9}{2}\vec{a}-\vec{b}$.

【实战演练】

一、达标检测

1．A　　2．C　　3．A　　4．D　　5．B

6．$\vec{0}$　　7．1　　8．$\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$

第 2 讲　平面向量的坐标运算与数量积

【夯实基础】

1．5

2.【解】$\overrightarrow{F_3}=-\overrightarrow{F_1}-\overrightarrow{F_2}=-(3，4)-(2，-5)=(-5，1)$

3.【解】由题意得：$\overrightarrow{AB}=(2，4)$，$\overrightarrow{CD}=(1，2)$，$\overrightarrow{AC}=(2，6)$，

$\because 2\times2-1\times4=0$，$2\times6-2\times4\neq0$，

$\because \overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，直线 AC 不平行于直线 AB.

4．120°　　5．9　　6．1　　7．A　　8．$\sqrt{13}$　　9．0

10.【解】正确③ ⑥　　11．120°　　12．8　　13．2

【实战演练】

一、达标检测

1．A　　2．C　　3．C　　4．D　　5．$(-6，-3)$　　6．–4

7.【解】设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，

$\overrightarrow{CM}=(x_1+3，y_1+4)$，$\overrightarrow{CN}=(x_2+3，y_2+4)$，

$\overrightarrow{CA}=(-1，-8)$，$\overrightarrow{CB}=(-6，-3)$

$\because \overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CB}$，

$\therefore x_1+3=-3$，$y_1+4=-24$，得$x_1=-6$，$y_1=-28$，

$\therefore x_2+3=-12$，$y_2+4=-6$，得$x_1=-15$，$y_1=-10$，

$\therefore M(-6,-28)$，$N(-15,-10)$，$\overrightarrow{MN}=(-9,-18)$.

8.【解】（1）由题意得$\vec{b}-2\vec{c}=(\sin\beta-2\cos\beta,4\cos\beta+8\sin\beta)$，

$\because \vec{a}$与$\vec{b}-2\vec{c}$垂直，

$\therefore \vec{a}\cdot(\vec{b}-2\vec{c})=0$即$4\cos\alpha(\sin\beta-2\cos\beta)+\sin\alpha(4\cos\beta+8\sin\beta)=0$，

化简整理得$4\sin(\alpha+\beta)=8\cos(\alpha+\beta)$，

故$\tan(\alpha+\beta)=2$.

（2）由题意得$\vec{b}+\vec{c}=(\sin\beta+\cos\beta,4\cos\beta-4\sin\beta)$，

$\therefore |\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(\sin\beta+\cos\beta)^2+(4\cos\beta-4\sin\beta)^2}=\sqrt{17-15\sin 2\beta}$，

当$\sin 2\beta=-1$时，$|\vec{b}+\vec{c}|$的最大值为$4\sqrt{2}$.

（3）由题意知$\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=16$即$\sin\alpha\sin\beta=16\cos\alpha\cos\beta$，

所以$\sin\alpha\sin\beta-16\cos\alpha\cos\beta=0$，

又$\because \vec{a}=(4\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{b}=(\sin\beta,4\cos\beta)$，$\therefore \vec{a}//\vec{b}$.

二、直击高考

1．B　　2．B　　3．$\dfrac{3}{5}$

第 3 讲　复数的概念及运算

【夯实基础】

1．（1）1

（2）【解】①当z是实数时，$\begin{cases}a^2-2a-15=0\\a+3\neq 0\end{cases}$，解得：$a=5$；

② 当z是虚数时，$\begin{cases}a^2-2a-15\neq 0\\a+3\neq 0\end{cases}$，解得：$a\neq -3$且$a\neq 5$；

③ 当z是纯虚数时，$\begin{cases}a^2-2a-15\neq 0\\\dfrac{a^2-a-6}{a+3}=0\end{cases}$，解得：$a=-2$或$a=3$.

2．【解】$\because z_1=z_2$，$\therefore\begin{cases}m^2-2m-3=5\\m^2-4m+3=3\end{cases}$，解得：$m=4$.

3．$\dfrac{1}{4}$　　4．$\sqrt{2}$、$-\dfrac{\pi}{4}$　　5．$\cos\dfrac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{2}$、$e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$

6．【解】（1）原式$=3+7\mathrm{i}-3+2\mathrm{i}+4-3\mathrm{i}=4+6\mathrm{i}$

（2）原式$=40+20\mathrm{i}$

（3）原式$=\dfrac{(2-3\mathrm{i})(3-7\mathrm{i})}{(3+7\mathrm{i})(3-7\mathrm{i})}=-\dfrac{15+23\mathrm{i}}{58}$

（4）原式 $=\sqrt{6}[\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})]=\sqrt{6}\mathrm{i}$

7. $\frac{1\pm\sqrt{5}\mathrm{i}}{3}$

【实战演练】

一、达标检测

1．B　　2．A　　3．B　　4．D　　5．$\frac{3}{10}-\frac{\mathrm{i}}{10}$　　6．4

7．【解】由 $(z_1-2)(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$，得 $z_1=2-\mathrm{i}$，设 $z_2=a+2\mathrm{i}$（$a\in\mathbf{R}$），则

$z_1\cdot z_2=(2-\mathrm{i})(a+2\mathrm{i})=(2a+2)+(4-a)\mathrm{i}\in\mathbf{R}$，得 $a=4$，

所以 $z_2=4+2\mathrm{i}$.

8．【解】∵ $\frac{1+2\mathrm{i}}{a+b\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$，即 $\frac{a+2b}{a^2+b^2}+\frac{2a-b}{a^2+b^2}\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，得

$\begin{cases}\frac{a+2b}{a^2+b^2}=1\\ \frac{2a-b}{a^2+b^2}=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-3\\ b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}$（舍去），

所以 $a=-3$，$b=-1$.

二、直击高考

1．C　　2．−1　　3．C

专题八　平面解析几何

第 1 讲　直线

【夯实基础】

1．$\sqrt{10}$　　$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$　　2．（3）−1，135°；（4）0，$\sqrt{3}$，不存在，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3．（1）$x+y-3=0$；（2）$7x-2y-31=0$；（3）$y=-2$，$x=3$；（4）$y=\frac{1}{2}x+3$

4．−1，135°　　5．（1）平行；（2）平行；（3）相交；（4）重合；　　6．1

【实战演练】

一、达标检测

1．D　　2．C　　3．D　　4．C　　5．A　　6．B　　7．9　　8．$y=3x+1$

9．【解】因为 A，B，C 三点共线，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线

又因为 $\overrightarrow{AB}=(-\frac{5}{2},3-m)$，　$\overrightarrow{BC}=(5,-5)$

$\therefore -\frac{5}{2}\times(-5)=(3-m)\times5\Rightarrow m=\frac{1}{2}$.

10.【解】因为方程的根为$-\frac{1}{2}$，所以$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$

而直线的倾斜角为[0，π)，所以$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k=\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\sqrt{3}$.

11.【解】由题可知斜率存在且不为 0，设直线的方程为$y-2=k(x-1)$

令$y=0\Rightarrow x=1-\frac{2}{k}$，令$x=0\Rightarrow y=2-k$

由$\left|1-\frac{2}{k}\right|=|2-k|$，得$k=2$，$k=1$，$k=-1$

故满足条件的直线方程为$2x-y=0$或$x-y+1=0$或$x+y-3=0$.

12.【解】因为直线恒过定点，则$m(x-2y-3)+(2x+y+4)=0$

则$\begin{cases}x-2y-3=0\\2x+y+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

所以直线恒过(−1，−2).

13.【解】（1）因为直线平行，所以$a\times 2a=3$，得$a=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$；

（2）因为$l_1\perp l_2$，所以$a+6a=0$，得$a=0$.

二、直击高考

1．D　　2．C

第 2 讲　圆

【夯实基础】

1．(5，−6)，$\sqrt{3}$　　2．(2，−3)，2　　3．$\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\y=3+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

【实战演练】

一、达标检测

1. C　　2. B　　3. A　　4. C　　5. $(x+1)^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{37}{4}$　　6. $(x-2)^2+(y+1)^2=1$

7.【解】（1）设所求圆的方程为$x^2+(y-b)^2=5^2$，则$3^2+(1-b)^2=25\Rightarrow b=-3$或$b=5$，

所求圆的方程为$x^2+(y+3)^2=25$或$x^2+(y-5)^2=25$.

（2）由题意得$r=\frac{|AB|}{2}=\frac{\sqrt{(-3-1)^2+(3+1)^2}}{2}=2\sqrt{2}$，

圆心是线段 AB 的中点(−1，1)，所求圆的方程为$(x+1)^2+(y-1)^2=8$.

（3）设圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，由题意得

$\begin{cases}F=0\\2+D+E+F=0\\16+64+4D-8E+F=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=-8\\E=6\\F=0\end{cases}$，

所求圆的方程为 $x^2+y^2-8x+6y=0$.

二、直击高考

1．B　　2．$4\sqrt{2}-1$

第 3 讲　直线与圆的位置关系

【夯实基础】

1．$-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$k>\sqrt{3}$ 或 $k<\sqrt{3}$　　2．$\sqrt{2}$　　3．$3x-2y+13=0$

【实战演练】

一、达标检测

1．B　　2．D　　3．D　　4．B　　5．$15x-8y-32=0$ 或 $x=0$　　6．1

7．【解】由题知，P 在圆外，故切线有 2 条，

k 不存在时，$x=2$，符合题意，

k 存在时，设直线方程为 $y-2=k(x-2)$，即 $kx-y+2-2k=0$

$$d=\frac{|k+2-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Rightarrow k=\frac{3}{4}$$

所以 $y-2=\dfrac{3}{4}(x-2)$，即 $3x-4y+2=0$

综上，切线方程为 $x=2$ 或 $3x-4y+2=0$.

8．【解】设直线方程为 $y-1=k(x-2)$

则 $d=\dfrac{|k(-1-2)-(-2)+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{3|k-1|}{\sqrt{k^2+1}}<r=3\Rightarrow|k-1|<\sqrt{k^2+1}\Rightarrow k<0,$

所以直线的斜率 k 的取值范围是 $(-\infty,0)$.

9．【解】设圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

将 $A(1,-1)$，$B(1,4)$，$C(4,-2)$ 代入，得

$$\begin{cases}1+1+D-E+F=0\\1+16+D+4E+F=0\\16+4+4D-2E+F=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=-7\\E=-3\\F=8\end{cases}$$

所以圆心的坐标为 $(-\dfrac{7}{2},\dfrac{3}{2})$.

二、直击高考

1．$3x-4y+6=0$　　2．B

第 4 讲　椭圆的标准方程与性质

【夯实基础】

1．（1）4，120°；（2）8；（3）B

2．（1）$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{6y^2}{25}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{21x^2}{25}=1$；（2）$\dfrac{3}{5}$；（3）$m\in(1,\dfrac{3}{2})\cup(\dfrac{3}{2},2)$

【实战演练】

一、达标检测

1．C　　2．B　　3．B　　4．C　　5．$\frac{35}{3}$　　6．3 或 5

7．【解】（1）由题可知 $\begin{cases}\frac{a^2}{c}=8\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ c=2\end{cases}$

所以 $b^2=a^2-c^2=12$．

（2）**解法一**：由题可知，$c=2$，设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

$$\begin{cases}\frac{25}{4a^2}+\frac{9}{4b^2}=1\\ a^2-b^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=10\\ b^2=6\end{cases}\Rightarrow\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1.$$

解法二：$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|PF_1|=\frac{3\sqrt{10}}{2}$，$|PF_2|=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{10}=2a$

$a=\sqrt{10}$，$c=2$，$b^2=6\Rightarrow\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$．

8．【解】（1）由题可知：$a=2$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $c=\sqrt{2}$

$b^2=a^2-c^2=2$

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．

（2）将 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=k(x-1)\end{cases}\Rightarrow(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-4=0$

$\Delta=24k^2+16>0\Rightarrow k\in\mathbf{R}$

则 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-4}{1+2k^2}$

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(\frac{4k^2}{1+2k^2})^2-4\frac{2k^2-4}{1+2k^2}}$

点 A 到直线 MN 的距离为 d，则 $d=\frac{|2k-k|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$

$$\frac{\sqrt{10}}{3}=\frac{1}{2}|MN|\times d=\frac{1}{2}\times\sqrt{1+k^2}\sqrt{(\frac{4k^2}{1+2k^2})^2-4\frac{2k^2-4}{1+2k^2}}\times\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$$

$k^2=1$，即 $k=\pm1$．

二、直击高考

1．C　　2．C

第 5 讲　双曲线的标准方程和性质

【夯实基础】

1．7 或 23　　2．$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 或 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$　　3．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

4．$m\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　5．$\frac{5}{2}$　　6．$\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

【实战演练】

一、达标检测

1．C　　2．A　　3．B　　4．C　　5．$k\in(-6,1)$

6．$\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$　　7．17

8．【解】设双曲线的方程为 $x^2-4y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$

因为过（4，3），代入得 $16-4\times 9=\lambda$，$\lambda=-20$

所以 $x^2-4y^2=-20$，即 $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{20}=1$.

9．【解】（1）$|MF|=\sqrt{(x-5)^2+y^2}$，

点 M 到直线 l 的距离 $d=|x-\frac{9}{5}|$，

依题意，有 $\frac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{|x-\frac{9}{5}|}=\frac{5}{3}$，

去分母，得 $3\sqrt{(x-5)^2+y^2}=|5x-9|$，

平方整理得 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，即为点 M 的轨迹方程.

（2）设点 P 的坐标为 $P(x,y)$，

由 $|OP|=\sqrt{34}$ 得 $x^2+y^2=34$，

解方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1\\ x^2+y^2=34\end{cases}$，

得 $\begin{cases}x=3\sqrt{2}\\ y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3\sqrt{2}\\ y=-4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3\sqrt{2}\\ y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3\sqrt{2}\\ y=-4\end{cases}$

∴点 P 为（$3\sqrt{2}$，4）或（$-3\sqrt{2}$，-4）或（$-3\sqrt{2}$，4）或（$3\sqrt{2}$，-4）.

二、直击高考

1．B　　2．7

第 6 讲　抛物线的标准方程和性质

【夯实基础】

1．5　　2．x，左，$x=\frac{1}{2}$

【实战演练】

一、达标检测

1．C　　2．B　　3．B　　4．C　　5．$(0,\frac{1}{16})$　　6．$y^2=4x$

7．【解】①若焦点在x轴上，由题意可设抛物线方程为$y^2=-2px(p>0)$

将点$(-2,4)$代入$16=-2p\times(-2)\Rightarrow p=4$，

所以$y^2=-8x$．

②若焦点在y轴上，由题意可设抛物线方程为$x^2=2py(p>0)$

将点$(-2,4)$代入$(-2)^2=2p\times4\Rightarrow p=\frac{1}{2}$，

所以$x^2=y$．

8．【解】建立如图所示坐标系：则$A(-20,-6)$，$B(20,-6)$

设抛物线的方程为$x^2=-2py(p>0)$

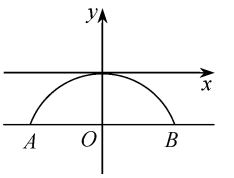
$400=12p\Rightarrow p=\frac{100}{3}$

所以$x^2=-\frac{200}{3}y$

当$x=2$时，$-\frac{200}{3}y_0=4$

$y_0=-\frac{3}{50}\Rightarrow|y_0|<1$

所以能通过．



二、直击高考

1．$y^2=8x$　　2．C

第7讲　直线与圆锥曲线

【夯实基础】

1．$\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$　　2．$\frac{4\sqrt{30}}{3}$　　3．$3x+4y-7=0$　　4．$(3,\sqrt{3})$或$(3,-\sqrt{3})$

5．$x^2=-16y$　　6．（1）$(-2,3)$；（2）$4+\sqrt{13}$

【实战演练】

一、达标检测

1．B　　2．C　　3．B　　4．B　　5．$m\in[4,5)$　　6．5

7．【解】$\begin{cases}4x^2+y^2=1\\y=x+b\end{cases}\Rightarrow 5x^2+2kx+b^2-1=0$

所以$x_1+x_2=-\frac{2}{5}b$，$x_1x_2=\frac{b^2-1}{5}$

所以$\frac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{1+1}\sqrt{(-\frac{2}{5}b)^2-4\times\frac{b^2-1}{5}}$，得$b^2=\frac{10}{16}$

所以 $b=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}$.

8.【解】根据题意，可得 $b^2y^2-a^2x^2=a^2b^2$

设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_1,\ y_1)$，则 $\begin{cases}b^2y_1^2-a^2x_1^2=a^2b^2\\ b^2y_2^2-a^2x_2^2=a^2b^2\end{cases}$

$b^2(y_1^2-y_2^2)=a^2(x_1^2-x_2^2)$，

$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{a^2(x_1+x_2)}{b^2(y_1+y_2)}=1$，即 $\frac{a^2(-\frac{10}{3})}{b^2(-\frac{4}{3})}=1$

得 $2b^2=5a^2$

因为 $c=\sqrt{7}$

$\begin{cases}2b^2-5a^2=0\\ a^2+b^2=7\end{cases}\Rightarrow a^2=2,\ b^2=5$

经检验，符合题意

所以双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{5}=1$.

9.【解】（1）抛物线 C 的准线方程是 $y=-\frac{1}{8}$，焦点坐标 $(0,\ \frac{1}{8})$.

（2）$\begin{cases}y=x+2\\ y=2x^2\end{cases}\Rightarrow 2x^2-x-2=0\Rightarrow x_1+x_2=\frac{1}{2}$，所以点 N 的坐标为 $(\frac{1}{4},\ \frac{1}{8})$.

（3）设实数 k 存在，则 $\begin{cases}y=kx+2\\ y=2x^2\end{cases}\Rightarrow 2x^2-kx-2=0$，（$\Delta=k^2+16>0$）

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{k}{2}$，$x_1x_2=-1$，$y_1y_2=\frac{k^2}{2}+4$，$y_1y_2=4$

M 点的横坐标为 $\frac{k}{4}$，N 点的横坐标为 $\frac{k}{4}$，代入抛物线方程得 $N(\frac{k}{4},\ \frac{k^2}{8})$

$\overrightarrow{AN}=(\frac{k}{4}-x_1,\ \frac{k^2}{8}-y_1)$，$\overrightarrow{BN}=(\frac{k}{4}-x_2,\ \frac{k^2}{8}-y_2)$

因为 $\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{BN}\Rightarrow\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BN}=0$

即 $(\frac{k}{4}-x_1)(\frac{k}{4}-x_2)+(\frac{k^2}{8}-y_1)(\frac{k^2}{8}-y_2)=0$

整理得 $\frac{k^2}{16}-\frac{k}{4}(x_1+x_2)+x_1x_2+\frac{k^4}{64}-\frac{k^2}{8}(y_1+y_2)+y_1y_2=0$

即 $k^4+12k^2-64=0$，得 $k=\pm2$

所以存在实数 k，使 $\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{BN}$.

二、直击高考

1.【解】（1）焦点在 x 轴，$\frac{b}{a}=3\Rightarrow b=3a\Rightarrow 9a^2+a^2=10$

$a^2=1$，$b^2=9$，所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$.

（2）设存在直线 l，且与双曲线 C 交于 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$

若 k 不存在，$x=0$ 不合题意

$\therefore k$ 存在，设直线的方程为 $y-3=kx \Rightarrow y=kx+3$

$$\begin{cases} y=kx+3 \\ x^2-\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases} \Rightarrow (9-k^2)x^2-6kx-18=0 \Rightarrow x_1+x_2=\frac{6k}{9-k^2},\ x_1x_2=\frac{-18}{9-k^2}$$

$y_1+y_2=\dfrac{54}{9-k^2}$，$y_1y_2=9$

因为 $\overrightarrow{B_2A} \perp \overrightarrow{B_2B}$，而 $\overrightarrow{B_2A}=(x_1, y_1+3)$，$\overrightarrow{B_2B}=(x_2, y_2+3)$

所以 $x_1x_2+(y_1+3)(y_2+3)=0 \Rightarrow x_1x_2+y_1y_2+3(y_1+y_2)+9=0$

即 $\dfrac{-18}{9-k^2}+9+3\times\dfrac{54}{9-k^2}+9=0$，得 $k^2=17$，

经检验，$\Delta>0$

所以 $k=\pm\sqrt{17}$

所以直线的方程为 $y=\pm\sqrt{17}x+3$.

2.【解】（1）由题可知：$\begin{cases} c+a=5 \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$，得 $a=3$，$c=2$，$b^2=5$

所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

（2）直线 AD：$y=\dfrac{m}{12}(x+3)$，直线 BD：$y=\dfrac{m}{6}(x+3)$

设 M 的坐标为（x_1，y_1）

联立方程组：$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1 \\ y=\dfrac{m}{12}(x+3) \end{cases} \Rightarrow (5+\frac{9m^2}{12^2})x^2+\frac{54m^2}{12^2}x+\frac{9^2m^2}{12^2}-45=0$

得 $-3x_1=\dfrac{\dfrac{9^2m^2}{12^2}-45}{5+\dfrac{9m^2}{12^2}}$，得 $x_1=\dfrac{240-3m^2}{80+m^2}$

所以 $y_1=\dfrac{m}{12}(x_1+3)=\dfrac{40m}{80+m^2}$

同理可得：$x_2=\dfrac{3m^2-60}{20+m^2}$，$y_2=\dfrac{m}{6}(x_2-3)=\dfrac{-20m}{80+m^2}$

若 $x_1=x_2$，则 $m^2=40$，此时 $x_1=x_2=1$，过点（1，0），

若 $x_1\neq x_2$，则 $m^2\neq 40$，

$k_{ME}=\dfrac{\dfrac{40m}{80+m^2}}{\dfrac{240-3m^2}{80+m^2}-1}=\dfrac{10m}{40-m^2}$，$k_{NE}=\dfrac{\dfrac{-20m}{80+m^2}}{\dfrac{3m^2-60}{20+m^2}-1}=\dfrac{10m}{40-m^2}$

得 $k_{ME}=k_{NE}$

所以直线过定点(1，0)

综上，直线必过 x 轴上点 $E(1,0)$.

第 8 讲　坐标轴平移和参数方程

【夯实基础】

1．（1，−3）　　2．$\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{4}=1$　　3．$\begin{cases}x=4+2\cos\alpha\\y=1+2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）

4．$\begin{cases}x=t\\y=-t+2\end{cases}$　$\begin{cases}x=2t\\y=2-2t\end{cases}$　　5．$(x+3)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

【实战演练】

一、达标检测

1．D　　2．A　　3．D　　4．D　　5．70°　　6．（−3，2）

7．【解】（1）将 $t=x$ 代入 $y=2+3t^2$，得 $y=2+3x^2$.

（2）因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，将 $x=\cos\alpha$，$y=\sin^2\alpha$ 代入，

得 $y=1-x^2$（$0\leqslant x\leqslant 1$）.

（3）由 $\begin{cases}x=1+\frac{1}{1+m^2}\\y=1+\frac{m}{1+m^2}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-1=\frac{1}{1+m^2}\\y-1=\frac{m}{1+m^2}\end{cases}$，两式相除，得 $\frac{y-1}{x-1}=m$，将其代入

$x=1+\frac{1}{1+m^2}$，得 $x^2+y^2-3x-2y+3=0$.

8．【解】将原的方程化为标准形式：$x^2+(y-1)^2=2$

令 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta\\y=1+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数且 $0\leqslant\theta<2\pi$）

$$z=\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{2}\sin\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以，最大值为 $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$，最小值为 $-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

所以取值范围为 $[-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}]$.

专题九　立体几何

第 1 讲　点、线、面的位置关系

【夯实基础】

1．D，C，B　　2．C，D，B，D，$[0,\frac{\pi}{2}]$，垂直

3．D，相交或平行或异面，D，D，D

4．①②③，D，C，B，D，D，A，B

【实战演练】

一、达标检测

1．C　2．B　3．C　4．C　5．$12\sqrt{2}$　6．400　7．$\frac{3}{4}$

8．【证明】$\because \angle ACB = 90^\circ$

$\therefore BC \perp AC$

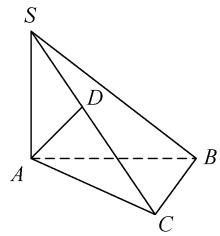
又 $SA \perp$ 平面 ABC

$\therefore SA \perp BC$，$SA \cap AC = A$

$\therefore BC \perp$ 平面 SAC

$\therefore BC \perp AD$，$AD \perp SC$，$BC \cap SC = C$

$\therefore AD \perp$ 平面 SBC.



9．【证明】（1）连接 AC，AC 交 BD 于 O，连接 EO

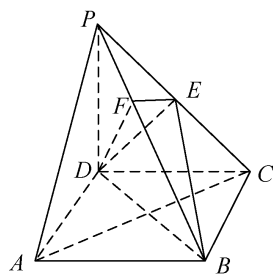
$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形

$\therefore$ 点 O 是 AC 的中点

在△PAC 中，EO 是中位线　$\therefore PA // EO$

而 $EO \subset$ 平面 EDB 且 $PA \not\subset$ 平面 EDB

所以，$PA //$ 平面 EDB.



（2）$\because PD \perp$ 底面 $ABCD$ 且 $DC \subset$ 底面 $ABCD$

$\therefore PD \perp DC$

$\because PD = DC$

$\therefore DE \perp PC$　①

同样由 $PD \perp$ 底面 $ABCD$，得 $PD \perp BC$

$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形，有 $DC \perp BC$

$\therefore BC \perp$ 平面 PDC.

而 $DE \subset$ 平面 PDC,

$\therefore BC \perp DE$.　②

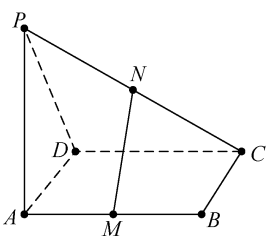
由①和②推得 $DE \perp$ 平面 PBC.

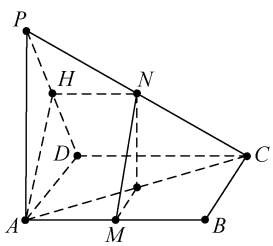
$\therefore DE \perp PB$

又 $EF \perp PB$

所以 $PB \perp$ 平面 EFD.

10．





（1）【证明】取 PD 的中点 H，连接 AH，HN

∵ N是PC中点

∵ $NH // CD$且$NH = \frac{1}{2}CD$

又 $ABCD$是矩形，M、N分别是AB、PC的中点

∴ $NH // AM$且$NH = AM$，∴ $MN // AH$

∴ $MN //$平面PAD.

（2）【证明】∵ $PA \perp$矩形$ABCD$

∴ $PA \perp AB$

又 $AD \perp AB$

∴ $AB \perp$平面PAD

∴ $CD \perp$平面PAD

∴ $CD \perp AH$

∵ $AH // MN$

∴ $MN \perp CD$.

（3）【解】在直角三角形 PAD 中，$\angle PDA = 45°$，H 是 PD 的中点

∴ $AH \perp PD$

又∵ $AH // MN$

∴ $MN \perp PD$

∴ $MN \perp$平面PCD.

二、直击高考

1．A　　2．C

3．（1）【解】∵正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 底面边长为 2

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60° = \sqrt{3}$

又 $A_1A_1 = \sqrt{3}$

∴ $V_{A_1-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = 1$.

（2）【证明】连接 AB_1，交 A_1B 于 O

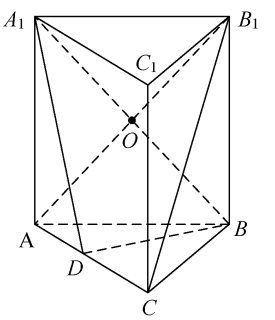
∵正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$

∴ O 为 AB_1 的中点，又 D 为 AC 的中点

∴ OD 为 $\triangle AB_1C$ 的中位线　∴ $OD // B_1C$

又 $OD \subset$ 平面 A_1BD

∴ $B_1C //$ 平面 A_1BD.



（3）【解】∵正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$

∴ $BD \perp AD$ 又 $AA_1 \perp$ 平面 ABC

∴ $\angle ADA_1$ 为三面角 $A_1 - BD - A$ 的平面角

又 $AA_1 = \sqrt{3}$，$AD = 1$　　∴ $\angle ADA_1 = 60°$.

第 2 讲　柱、锥、球及其组合体

【夯实基础】

4．（3）（5）

5．6，1；24，$4\sqrt{3}$；4π，2π；16π，$\frac{32}{3}\pi$；$\sqrt{3}$；8π

【实战演练】

一、达标检测

1．C　2．C　3．A　4．C　5．32　6．9π　7．$\frac{5}{3}$　8．4

9．（1）【证明】由 C' 在平面 ABD 上的射影 O 恰好在 AB 上知平面 $ABC'\perp$ 平面 $ABCD$，

$DA\perp AB$，所以 $DA\perp$ 平面 ABC'，因此 $DA\perp BC'$．

而 $DC'\perp BC'$，所以 $BC'\perp$ 平面 $AC'D$，从而 $AC'\perp BC'$．

（2）【解】设点 A 到平面 BDC' 的距离为 h

由 $V_{A-BC'D}=V_{D-ABC'}$，得 $\frac{1}{3}S_{\triangle BC'D}\times h=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC'}\times DA$，解得 $h=\sqrt{6}$．

设直线 AB 与平面 BDC' 所成的角为 α，则 $\sin\alpha=\frac{h}{AB}=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

故直线 AB 与平面 BDC' 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$．

10．（1）【证明】在矩形 $ABCD$ 中，$BC\perp AB$

∵平面 $PAB\perp$底面 $ABCD$

∴ $BC\perp$侧面 PAB

∵ $BC\subset$侧面 PBC

∴侧面 $PAB\perp$侧面 PBC

（2）【解】取 AB 中点 E，连接 PE、CE

∵△ PAB 是等边三角形

∴ $PE\perp AB$

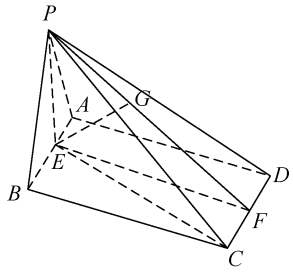
又∵侧面 $PAB\perp$底面 $ABCD$

∴ $PE\perp$底面 $ABCD$

∴ $\angle PCE$ 为侧棱 PC 与底面 $ABCD$ 所成角

$PE=\frac{\sqrt{3}}{2}BA=\sqrt{3}$，$CE=\sqrt{BE^2+BC^2}=\sqrt{3}$

在 Rt△ PEC 中，$\angle PCE=45°$．



（3）【解】在矩形 $ABCD$ 中，$AB//CD$

∵ $CD\subset$侧面 PCD，$AB\not\subset$侧面 PCD

∴ $AB//$ 侧面 PCD．

取 CD 中点 F，连 EF、PF，则 $EF\perp AB$

又∵ $PE\perp AB$

∴ $AB\perp$平面 PEF

又∵ $AB//CD$

∴ $CD\perp$平面 PEF

∴平面 $PCD\perp$平面 PEF

作 $EG\perp PF$，垂足为 G，则 $EG\perp$平面 PCD

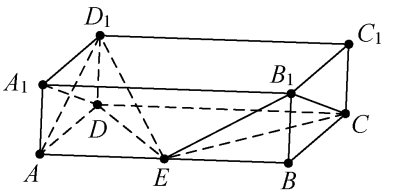
∴ EG 是直线 AB 与平面 PCD 的距离

在 Rt△ PEF 中， $EG=\dfrac{PE\cdot EG}{PF}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

二、直击高考

1．B

2．



（1）【证明】连接 AD_1．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为 $AD=AA_1$，所以 AA_1D_1D 为正方形，

从而 $AD_1\perp A_1D$．

因为点 E 在棱 AB 上，所以 AD_1 就是 ED_1 在平面 AA_1D_1D 上的射影，

从而 $D_1E\perp A_1D$．

（2）【解】① 连接 DE．由题意知 $AD=AA_1=1$， $AE=EB=1$．

在 Rt△ DAE 中， $DE=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

在 Rt△ EBC 中， $EC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

从而 $DE^2+EC^2=4=DC^2$，所以 $EC\perp DE$，

又由 $D_1D\perp$ 面 $ABCD$，知 $D_1D\perp EC$，即 $EC\perp D_1D$，

从而 $EC\perp$ 面 D_1DE，所以 $EC\perp D_1E$，

因此 $\angle D_1ED$ 是二面角 D_1-EC-D 的平面角．

在 Rt△ D_1DE 中， $\tan\angle D_1ED=\dfrac{D_1D}{DE}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

即二面角 D_1-EC-D 的大小为 $\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

② 设点 B 到平面 ECB_1 的距离为 h，

由 $EB=BC=BB_1=1$ 知 $EC=B_1C=B_1E=\sqrt{2}$，

$S_{\triangle ECB_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $V_{B-ECB_1}=V_{B_1-ECB}$，

所以 $\dfrac{1}{3}S_{\triangle ECB_1}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ECB}\cdot BB_1$，

即 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1$，所以 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故点 B 到平面 ECB_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

专题十　选考内容

第 1 讲　逻辑代数初步

【夯实基础】

1．19，$(101)_2$　　2．B，假，A　　3．1

4.

A	B	$A\overline{B}$	$Y=A\overline{B}+B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1

5．D

【实战演练】

一、达标检测

1．D　2．C　3．A　4．B　5．A　6．1011101　7．1，1

8．0，0 或 1，1　9．$L=A(B+C)$　10．（1）1；（2）$\overline{AB}$　11．(2,3)

12．$F=AB+AC$

（其中 A、B、C 为 0 代表不同意晋级，为 1 代表同意晋级；F 为 0 代表淘汰，为 1 代表晋级）

A	B	C	AB	AC	$AB+AC$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

二、直击高考

1．$(110011)_2$　2．1，0　3．（1）D；（2）$L=(A+B)\overline{C}$

第 2 讲　算法与程序框图

【夯实基础】

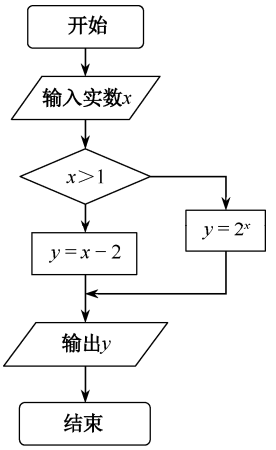
1．B　2．D

【实战演练】

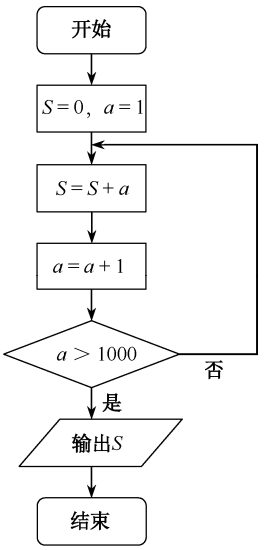
一、达标检测

1．B　2．D　3．D　4．B　5．$S=S+i$　$i=i+2$　6．11

7.



8.



二、直击高考

1．4　　2．（1）10；（2）$i<10$

第3讲　数据表格信息处理

【夯实基础】

2．B　　3．（0，3），16，（0，2，−1，0），7　　6．B

【实战演练】

一、达标检测

1．C，B　　2．C　　3．100°　　4．23，27，38　　5．20 m^2，198°

6．$x=4$，$y=-2$，$z=4$

7．①成本表如下：

名　称	数量	单价	金额/元
鸽　子	1只	14元/只	14
水发口菇	50克	10元/千克	0.5
冬笋、火腿、干贝等			6
调味品			0.9
合　计			21.4

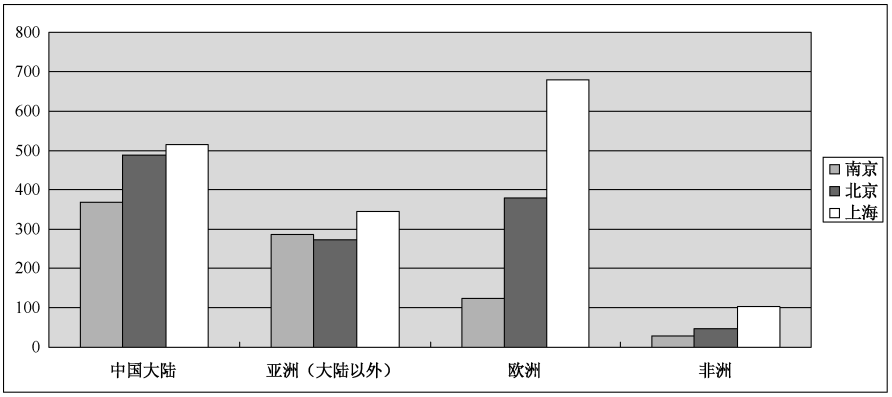
②21.4（1+55%）= 33.17 ≈ 33（元）.

8.（1）三个年龄段的人口数分别为25 232.38万人、96 945.46万人和10 624.46万人.

（2）三个年龄段的人口数及比例表如下：

年龄段	0～14岁	16～64岁	65岁及以上
人口数/万人	25 232.38	96 945.46	10 624.46
比例/%	19%	73%	8%

9.



从上海出发在中国大陆旅游和到欧洲、亚洲（中国大陆以外）、非洲旅游的人数均高于南京和北京；而从北京出发在中国大陆和到欧洲、非洲旅游的人数均高于南京；从南京出发旅游仅有到亚洲（中国大陆以外）的人数高于北京. 显示南京人的旅游消费还处于相对落后状态.

二、直击高考

1．87

2．①成本表如下：

名　　称	数　　量	单　　价	金额/元
青菜心	300 克	4 元/公斤	1.2
蘑　菇	100 克	12 元/公斤	1.2
调味品			0.85
合　计			3.25

②3.25（1+50%）=4.875≈5（元）.

3．（1）　　某商场购进商品验收单

产　　品	数量（件）	进价（元）	售价（元）	利润（元）
A 产品	150	100	120	3000
B 产品	120	80	110	3600
C 产品	150	50	80	4500

（2）A 产品的利润率：$\frac{120-100}{100}\times 100\%=20\%$.

第 4 讲　编制计划的原理与方法

【夯实基础】

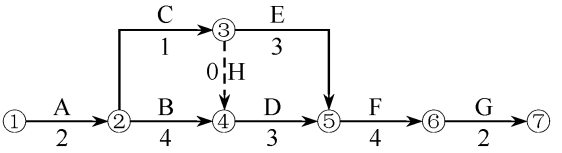
1．B，D，D　　3．B　　4．C，出现了逆向箭头　　5．B

【实战演练】

一、达标检测

1．C　　2．B　　3．（1）B；（2）C　　4．B　　5．A　　6．12

7．网络图：



由图得关键路径为 A→B→D→F→G，故总工期为 15．

8．①47；②A→B→D→F→G→H；③水电重新布线和木工制作橱柜．

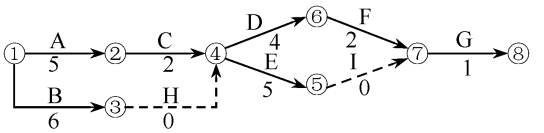
二、直击高考

1．1

2．某项工程的工作明细表如表所示：

工序	A	B	C	D	E	F	G
工期（天）	5	6	2	4	5	2	1
紧前工序			A	B、C	B、C	D	E、F

（1）网络图：

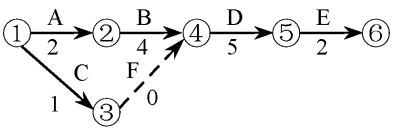


（2）关键路径：A→C→D→F→G．

（3）总工期：14 天．

3．

工作代码	紧前工作	紧后工作	工期（天）
A	无	B	2
B	A	D	4
C		D	1
D	B，C	E	5
E	D		2



华信 欢迎登录 免费 获取优质教学资源
http://www.hxedu.com.cn





“课课通”普通高校对口升学系列学习指导丛书

课堂学习配套用书

- 课课通 语文（第一册～第五册）
- 课课通 数学（第一册～第五册）
- 课课通 英语（第一册～第五册）
- 机械基础 学习指导与巩固练习（机电类）
- 电工技术基础 学习指导与巩固练习（机电类）
- 液压与气动 学习指导与巩固练习（机电类）
- 机械制图 学习指导与巩固练习（机电类）
- 电子技术基础 学习指导与巩固练习（机电类）
- 电工基础 学习指导与巩固练习（电子电工类）
- 电子线路 学习指导与巩固练习（电子电工类）
- 电工测量仪表 学习指导与巩固练习（电子电工类）
- 电子测量 学习指导与巩固练习（电子电工类）
- 电机和拖动 学习指导与巩固练习（电子电工类）
- 课课通 机械制图（机械类）
- 课课通 金属材料及热处理（机械类）
- 课课通 机械基础（机械类）
- 课课通 电工基础（机械类）
- 课课通 机械制造工艺基础（机械类）
- 课课通 计算机原理（计算机类）
- 课课通 C语言（计算机类）
- C语言同步练习及测试卷（计算机类）
- 课课通 计算机组装与维修（计算机类）
- 课课通 计算机网络技术（计算机类）
- 课课通 电子技术基础（计算机类）
- 课课通 会计基础（财会类）
- 课课通 财务会计（财会类）
- 课课通 成本会计（财会类）
- 课课通 财务管理（财会类）
- 课课通 会计相关法律知识（财会类）

高三总复习用书

- 课课通 对口升学考试专题复习与强化训练·语文
- 课课通 对口升学考试专题复习与强化训练·数学
- 课课通 对口升学考试单元总复习·英语
- 课课通 对口升学考试专题复习与强化训练·英语
- 课课通 对口升学考试专题复习与强化训练·机械基础（机电类）
- 课课通 对口升学考试专题复习与强化训练·电工技术基础（机电类）
- 课课通 对口升学考试专题复习与强化训练·液压与气动（机电类）
- 课课通 对口升学考试专题复习与强化训练·机械制图（机电类）
- 课课通 对口升学考试专题复习与强化训练·电子技术基础（机电类）
- 课课通 对口升学考试专题复习与强化训练·电子电工类专业
- 课课通 对口升学考试专题复习与强化训练·计算机类专业
- 课课通 对口升学考试专题复习与强化训练·财会类专业

考前冲刺仿真模拟测试卷

- 课课通 对口升学考试仿真模拟测试卷·语文
- 课课通 对口升学考试仿真模拟测试卷·数学
- 课课通 对口升学考试仿真模拟测试卷·英语
- 课课通 机电类专业综合理论仿真模拟测试卷
- 课课通 对口升学考试仿真模拟测试卷·电子电工类专业综合理论
- 课课通 对口升学考试仿真模拟测试卷·机械类专业综合理论
- 课课通 对口升学考试仿真模拟测试卷·计算机类专业综合理论
- 课课通 对口升学考试仿真模拟测试卷·财会类专业综合理论

专业技能考试优化训练

- 课课通 机械类专业对口升学技能考试优化训练
- 课课通 机电类专业对口升学技能考试优化训练
- 课课通 电子电工类专业对口升学技能考试优化训练
- 课课通 计算机类专业对口升学技能考试优化训练





ISBN 978-7-121-24275-5

9 787121 242755 >

定价：52.00元（附试卷）

策划编辑：张　凌
责任编辑：张　凌
封面设计：张　昱